

第 133 講 不定積分

学習目標

- ・ 不定積分の意味を理解し、微分して元の関数になる原始関数を求められるようになる。
- ・ 任意定数 C の役割を理解し、不定積分を $F + C$ の形で表せるようになる。
- ・ 多項式の積分について、微分による検算まで含めて正しく処理できるようになる。

原始関数と不定積分

ある区間で関数 $F(x)$ を微分すると $f(x)$ になる、つまり $F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

関数 $f(x)$ のすべての原始関数を表すものを不定積分といい、次のように書く。

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ここで、 C は任意の実数であり、 x によって変化しない定数である。

$\int$ は「積分する」という操作を表し、 $f(x)$ を被積分関数、 dx は x について積分することを表す。

原始関数が 1 つに決まらない理由

微分すると定数は消える。

例えば、 $x^2 + 1$ を微分すると $2x$ になり、 $x^2 - 3$ を微分しても $2x$ になる。このように、微分して同じ関数になるものは複数存在する。

同じ区間で $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = f(x)$ なら、 $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0$ となる。

微分して 0 になる関数は定数なので、 $F(x) - G(x)$ は一定の値になる。したがって、原始関数どうしの違いは定数だけであり、不定積分では最後に任意定数 C を付ける。

微分すると C が消えるため、積分する前の関数だけから原始関数を 1 つに決めることはできない。

原始関数の族

例えば、 $x^2 - 1$ 、 x^2 、 $x^2 + 1$ はすべて微分すると $2x$ になる。

このように、同じ導関数をもつ関数は定数だけ異なる集まりとして考えられる。

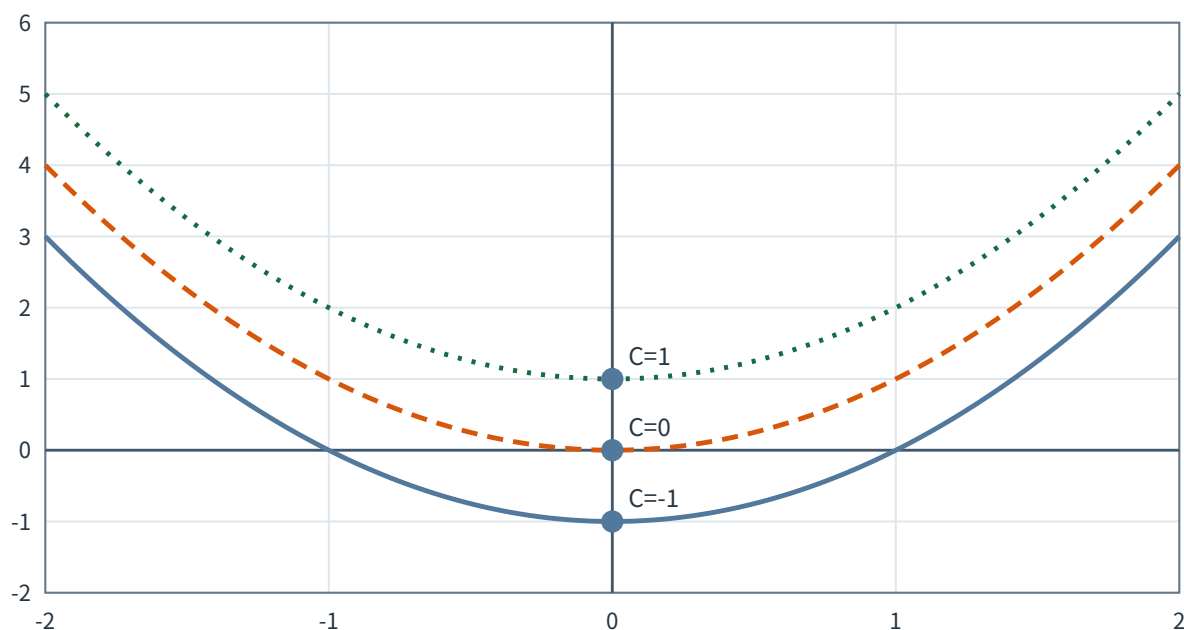


図1 $C = -1, 0, 1$ の三例。実線は $y = x^2 - 1$ 、破線は $y = x^2$ 、点線は $y = x^2 + 1$ 。頂点の点は曲線の識別用で、定義域の端点ではない。横軸は x 、縦軸は y 。3 本とも定義域は実数全体で、表示範囲はその一部である。いずれの導関数も $2x$ になることは、本文で定数項の微分が 0 であることから確かめる。

多項式の不定積分

不定積分では、微分の逆向きの操作を考える。

正の整数 n について、

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

となる。

これは右辺を微分すると、

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = x^n$$

となることから確認できる。

定数 k の積分は別に扱い、

$$\int k dx = kx + C$$

である。ここで $k = 0$ の場合も、 $\int 0 dx = C$ となるので、任意定数 C は残る。

また、 $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$ のとき、 a, b が定数なら、

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = aF(x) + bG(x) + C$$

となる。最後に付ける任意定数は 1 つでよい。

注意

積の形の不定積分では、原始関数同士を掛ければよいという規則は一般には成り立たない。本講で扱う多項式の積分では、まず式を展開して多項式の形に直し、それぞれの項を積分する。また、不定積分では原始関数の違いが定数だけになるため、最後に任意定数 C を忘れない。 C は任意の実数であり、 x によって変化しない定数である。積分した結果が正しいかどうかは、最後に微分して元の被積分関数になるかを確認する。

例題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx$$

例題 1 の解答・解説

各項を分けて積分する。

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 4x + 2) dx &= \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 2 dx \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x + C\end{aligned}$$

最後に微分して確認する。

$$(x^3 - 2x^2 + 2x + C)' = 3x^2 - 4x + 2$$

元の被積分関数になるので正しい。

不定積分では、各項を積分した後に任意定数を最後に 1 つ付ける。

例題 2

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (x + 1)(x - 2) dx$$

例題 2 の解答・解説

積の形のままではなく、まず展開する。

$$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int (x+1)(x-2) dx &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C\end{aligned}$$

微分して確認すると、

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \right)' = x^2 - x - 2$$

となる。

積分では、微分の公式の逆向きを考えるのであり、積の形だからといって積分結果を掛け合わせることはできない。

例題 3

$F'(x) = 2x$ 、 $F(1) = 3$ を満たす関数 $F(x)$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$F'(x) = 2x$ なので、 $F(x)$ は $2x$ の原始関数である。

したがって、 $F(x) = x^2 + C$

とおける。

条件 $F(1) = 3$ を使う。

$$F(1) = 1^2 + C$$

$$3 = 1 + C$$

より、 $C = 2$ である。

したがって、 $F(x) = x^2 + 2$ となる。

最後に 2 つの条件を確認する。

$$(x^2 + 2)' = 2x$$

また、 $F(1) = 1^2 + 2 = 3$ なので、両方の条件を満たす。

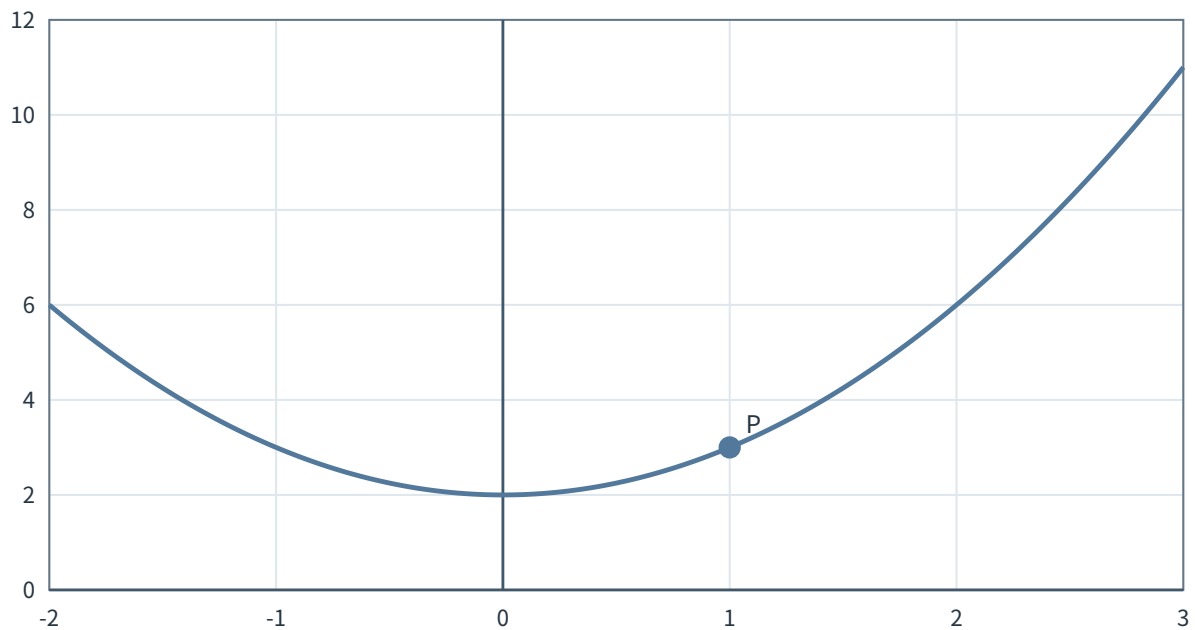


図2 条件 $F'(x) = 2x$ 、 $F(1) = 3$ を満たす原始関数 $F(x) = x^2 + 2$ と点 $P(1, 3)$ 。点 P は条件を示す点で、定義域の端点ではない。横軸は x 、縦軸は y 。定義域は実数全体で、表示範囲はその一部である。

練習問題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (5x^3 - 2x^2 + 4x - 1) dx$$

練習問題 2

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (x - 3)(x + 2) dx$$

練習問題 3

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 0 dx$$

また、なぜ積分結果に任意定数 C が残るのか説明しなさい。

練習問題 4

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (4x^2 + 3x - 5) dx$$

ただし、最後に微分して元の被積分関数になることを確認しなさい。

練習問題 5

$F'(x) = 6x^2 - 4x$ 、 $F(2) = 5$ を満たす関数 $F(x)$ を求めなさい。

練習問題 6

次の考え方が正しいか誤っているかを答え、誤っている場合は正しい考え方を説明しなさい。

$$\int (x+1)(x-2) dx = \left(\int (x+1) dx \right) \left(\int (x-2) dx \right)$$

練習問題 7

次の不定積分を求め、任意定数 C の意味を説明しなさい。

$$\int (7x^4 - 3) dx$$

練習問題 8

次の 2 つの式のうち、不定積分として正しいものを選び、理由を説明しなさい。

(ア)

$$\int 2x dx = x^2$$

(イ)

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

練習問題 1 の解答・解説

各項を分けて積分する。

$$\begin{aligned}\int (5x^3 - 2x^2 + 4x - 1) dx &= \int 5x^3 dx - \int 2x^2 dx + \int 4x dx - \int 1 dx \\ &= \frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - x + C\end{aligned}$$

微分して確認する。

$$\left(\frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - x + C \right)' = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

元の被積分関数になるので正しい。

練習問題 2 の解答・解説

積の形を展開してから積分する。

$$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int (x-3)(x+2) dx &= \int (x^2 - x - 6) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + C\end{aligned}$$

微分すると、

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + C \right)' = x^2 - x - 6$$

となり、展開後の被積分関数に戻る。

積の形の積分では、積分結果をそれぞれの積にすることはできず、まず式の形を変える必要がある。

練習問題 3 の解答・解説

0 は定数なので、

$$\int 0 dx = C$$

となる。

確認すると、 $(C)' = 0$ であり、元の被積分関数になる。

ここで C は任意の実数であり、 x に依存しない定数である。微分すると定数は 0 になるため、どの定数を選んでも同じ導関数をもつ。

したがって、0 の不定積分でも C が消えずに残る。

練習問題 4 の解答・解説

各項を積分する。

$$\begin{aligned}\int (4x^2 + 3x - 5) dx &= \int 4x^2 dx + \int 3x dx - \int 5 dx \\ &= \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C\end{aligned}$$

微分して確認する。

$$\left(\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C \right)' = 4x^2 + 3x - 5$$

よって正しい。

練習問題 5 の解答・解説

$F'(x) = 6x^2 - 4x$ なので、 $F(x)$ はこの関数の原始関数である。

$$\begin{aligned}F(x) &= \int (6x^2 - 4x) dx \\ &= 2x^3 - 2x^2 + C\end{aligned}$$

条件 $F(2) = 5$ を使う。

$$\begin{aligned}F(2) &= 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + C \\ 5 &= 16 - 8 + C\end{aligned}$$

よって、 $C = -3$ である。

したがって、 $F(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3$ となる。

確認すると、 $(2x^3 - 2x^2 - 3)' = 6x^2 - 4x$

また、 $F(2) = 16 - 8 - 3 = 5$ なので条件を満たす。

練習問題 6 の解答・解説

この考え方は誤りである。

右辺の各原始関数を考えるために、 $x+1$ と $x-2$ の原始関数の一つとして、それぞれ $U(x) = \frac{x^2}{2} + x$ 、 $V(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$ を選ぶ。 $U'(x) = x+1$ 、 $V'(x) = x-2$ である。

もし積分結果を原始関数同士の積にできるなら、

$$P = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right)$$

となる。

これを展開すると、

$$P = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 2x^2$$

である。

微分して確認すると、

$$P' = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 4x$$

となる。

しかし、元の被積分関数は、 $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ である。

例えば $x=0$ のとき、 $P' = 0$ であるのに対し、元の関数は -2 となり一致しない。

したがって、積分結果を原始関数同士の積にすることはできない。

正しくは、まず展開してから項別に積分する。

$$\begin{aligned}\int (x+1)(x-2) dx &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C\end{aligned}$$

微分すると、

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \right)' = x^2 - x - 2$$

となり、元の被積分関数に戻る。

よって、積の不定積分を原始関数同士の積にする規則は一般には成り立たない。

練習問題 7 の解答・解説

各項を積分する。

$$\begin{aligned}\int (7x^4 - 3) dx &= \int 7x^4 dx - \int 3 dx \\ &= \frac{7x^5}{5} - 3x + C\end{aligned}$$

ここで C は任意の実数であり、 x によって変化しない。

微分すると、

$$\left(\frac{7x^5}{5} - 3x + C \right)' = 7x^4 - 3$$

となるため、元の関数に戻る。

練習問題 8 の解答・解説

正しいのは (イ) である。

(ア) の x^2 は、 $2x$ の原始関数の 1 つである。実際に $(x^2)' = 2x$ なので、微分が合うこと自体は正しい。

しかし、不定積分では 1 つの原始関数だけでなく、すべての原始関数を表す必要がある。

x^2 に任意定数 C を加えた $x^2 + C$ を微分すると、 $(x^2 + C)' = 2x$ となる。定数 C は微分すると 0 になるため、どの実数を選んでも同じ導関数になる。

したがって、原始関数全体を表す不定積分の形としては、任意定数 C を含む (イ) が正しい。