第 206 講 部分積分法

学習目標

部分積分法を使う場面を判断し、積の形を含む不定積分を計算できるようになる。
具体的には、次のことを身につけることを目標とする。
- 部分積分法の公式を用いて、不定積分を変形できる。
- 微分すると簡単になる式と積分しやすい式を見極め、u と dv を適切に選べる。
- 2 回の部分積分が必要な場合も、段階を分けて処理できる。
- 不定積分における積分定数 C の意味を理解し、正しく扱える。

部分積分法の考え方と積分定数

開区間 I で u, v が連続な導関数をもつとする。$du = u'dx$、$dv = v'dx$ と定め、H を $u'v$ の 1 つの原始関数として選ぶ。このとき $H' = u'v$ である。
不定積分の計算では、右辺に現れる積分記号は原始関数全体の族ではなく、その中から 1 つの原始関数を選ぶという約束で扱う。したがって、

$$(uv - H)' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

より、$uv - H$ は uv' の 1 つの原始関数であり、

$$\int u\,dv = uv - H + C$$

となる。ここで H は $\int v\,du$ から選んだ 1 つの原始関数であるため、通常は、

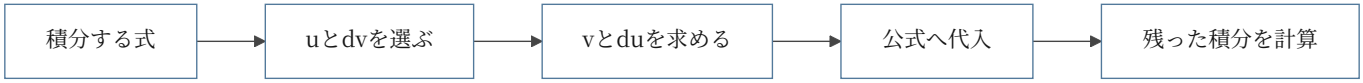
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C$$

と書く。
この表記では右辺の積分記号から 1 つの原始関数を選び、最後に積分定数 C を加える。原始関数全体の族を表す不定積分と、計算途中で選んだ 1 つの原始関数を区別することが重要である。微分すると、右辺は uv' になり、元の被積分関数を確認できる。



部分積分の手順

部分積分では、次の順序で考える。



特に、微分すると簡単になる式を u に選び、積分しやすい式を dv に選ぶことが多い。
例えば、x は微分すると 1 になり、e^x は積分しても e^x のままであるため、

$$u = x, \quad dv = e^x dx$$

のように選ぶと計算が進みやすい。

例題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int xe^x dx$$

例題 1 の解答・解説

x は微分すると簡単になり、e^x は積分しても形が変わらないため、$u = x,\quad dv = e^x dx$ とおく。
すると、$du = dx,\quad v = e^x$ である。
部分積分法より、

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

となる。
微分確認をすると、$\frac{d}{dx}\{e^x(x-1)\} = xe^x$ であり、正しく元の被積分関数に戻る。

例題 2

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x \log x \, dx$$

ただし、$\log x$ は自然対数であり、定義域は $x > 0$ とする。

例題 2 の解答・解説

自然対数を扱うため、$x > 0$ の範囲で考える。$\log x$ は微分すると簡単になるため、
$u = \log x,\quad dv = x\,dx$ とおく。
すると、$du = \frac{1}{x}dx,\quad v = \frac{x^2}{2}$ である。
部分積分法より、

$$\begin{aligned}\int x \log x dx &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

となる。

例題 3

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x^2 e^x dx$$

例題 3 の解答・解説

x^2 は微分を繰り返すと次数が下がるため、2 回の部分積分を段階的に行う。
1 回目は、$u = x^2,\quad dv = e^x dx$ とおく。すると、$du = 2xdx,\quad v = e^x$ である。

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

ここで残った積分をもう一度部分積分する。$u = x,\quad dv = e^x dx$ とおくと、$du = dx,\quad v = e^x$ である。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= e^x(x-1)$$

したがって、最初の式へ戻して、

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C$$

$$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

となる。最後の結果を微分すると $x^2 e^x$ に戻るため、計算が正しいことを確認できる。

演習 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 3x e^x dx$$

演習 2

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x \sin x dx$$

演習 3

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x^2 \log x dx$$

ただし、$\log x$ は自然対数であり、$x > 0$ とする。

©ミライコーチング

演習 4

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x^3 e^x \, dx$$

必要なら部分積分を複数回用いること。

演習 5

次の計算の誤りを指摘し、正しい結果を求めなさい。
ある生徒は、

$$\int xe^x \, dx$$

について、

$$u = x, \quad dv = e^x dx$$

とおき、

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int xe^x \, dx$$

と計算した。

演習 6

次の不定積分を求め、最後に微分して確認しなさい。

$$\int (x+1)e^x \, dx$$

演習 7

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

演習 8

次の不定積分を求めなさい。

$$\int x \log(2x) \, dx$$

ただし、$\log(2x)$ は自然対数であり、$x > 0$ とする。

演習 1 の解答・解説

定数倍を外へ出し、$u = x,\quad dv = e^x dx$ とおく。すると、$du = dx,\quad v = e^x$ である。

$$\begin{aligned}\int 3xe^x dx &= 3\int xe^x dx \\ &= 3\left(xe^x - \int e^x dx\right) \\ &= 3e^x(x-1) + C\end{aligned}$$

したがって、求める原始関数を得る。

演習 2 の解答・解説

x を微分側に選び、$u = x,\quad dv = \sin x dx$ とおく。すると、$du = dx,\quad v = -\cos x$ である。

$$\begin{aligned}\int x\sin x dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

したがって、求める原始関数を得る。

演習 3 の解答・解説

自然対数を含むため、$x > 0$ の範囲で考える。$u = \log x,\quad dv = x^2 dx$ とおくと、$du = \frac{1}{x}dx,\quad v = \frac{x^3}{3}$ である。

$$\begin{aligned}\int x^2 \log x dx &= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

したがって、求める原始関数を得る。

演習 4 の解答・解説

x^3 は微分を繰り返すと次数が下がるため、3 回の部分積分を段階的に行う。
1 回目は、$u = x^3,\quad dv = e^x dx$ とおく。すると、$du = 3x^2 dx,\quad v = e^x$ である。

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

2 回目は、$u = x^2,\quad dv = e^x dx$ とおく。すると、$du = 2x dx,\quad v = e^x$ である。

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

3 回目は、$u = x,\quad dv = e^x dx$ とおく。すると、$du = dx,\quad v = e^x$ である。

$$\int x e^x dx = e^x(x-1)$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\{x^2 e^x - 2e^x(x-1)\} + C$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

したがって、3 段階の部分積分で次数を下げて計算できる。

演習 5 の解答・解説

誤りは、部分積分後の積分を元の式と同じにしている点である。
$u = x,\quad dv = e^x dx$ とすると、$du = dx,\quad v = e^x$ である。
残る積分は $\int e^x dx$ になる。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= e^x(x-1) + C$$

du と v の計算を正しく行うことが、誤りを防ぐポイントである。

演習 6 の解答・解説

式を分け、部分積分を用いる。

$$\int (x+1)e^x dx = \int x e^x dx + \int e^x dx$$

$$= e^x(x-1) + e^x + C$$

$$= x e^x + C$$

微分すると、

$$(x e^x)' = e^x + x e^x$$

$$= (x+1)e^x$$

となり、元の被積分関数を確認できる。

演習 7 の解答・解説

1 回目は、$u = x^2,\quad dv = \cos x dx$ とおく。すると、$du = 2xdx,\quad v = \sin x$ である。

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$$

さらに、$\int x \sin x dx$ に部分積分を用いる。

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) \\ &= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

したがって、求める原始関数を得る。

演習 8 の解答・解説

$x > 0$ の範囲で考える。$\log(2x)$ は微分すると簡単になるため、$u = \log(2x),\quad dv = xdx$ とおく。
すると、$du = \frac{2}{2x}dx = \frac{1}{x}dx,\quad v = \frac{x^2}{2}$ である。
部分積分法より、

$$\begin{aligned}\int x\log(2x)dx &= \frac{x^2}{2}\log(2x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x) - \frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x) - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

となる。
微分確認では、連鎖微分により $\frac{d}{dx}\log(2x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\log(2x) - \frac{x^2}{4}\right) &= x\log(2x) + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x}{2} \\ &= x\log(2x)\end{aligned}$$

したがって、元の被積分関数に戻ることを確認できる。