

## 第 140 講 等差数列の和

### 学習目標

- 等差数列の初めの $n$ 項の和を $S_n$ で表し、その意味を説明できる。
- 初項 $a_1$ 、公差 $d$ 、項数 $n$ から等差数列の和を求められる。
- 逆順に並べた同じ和を利用して、和の公式が成り立つ理由を説明できる。

### 等差数列の和を考える理由

数列の和は、どのような有限数列でも各項を順に足すことで求められる。等差数列で重要なのは、単に順番に足せることなく、隣り合う項の差が一定であるという性質を利用して、多くの項の和をまとめて計算できる点である。

そこで、初めの $n$ 項の合計を $S_n$ と表し、項をまとめて計算する方法を考える。

ここで区別すべきなのは、 $a_n$ と $S_n$ の違いである。 $a_n$ は第 $n$ 項という 1 つの項を表し、 $S_n$ は第 1 項から第 $n$ 項までをすべて加えた合計を表す。

初項を $a_1$ 、公差を $d$ とすると、等差数列の各項は 139 講で学んだ一般項を利用して表せる。ここでは有限個の項の和だけを扱う。

### 初めの $n$ 項の和

等差数列の初めの $n$ 項の和を $S_n$ と表す。

つまり、 $S_n$ は第 1 項から第 $n$ 項までを加えたものであり、 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である。

$n$ は 1 からの正整数であり、初項 $a_1$ と公差 $d$ は実数でよい。したがって、公差は正、負、0 のいずれも考える。

### 和の公式の理由

初めの $n$ 項を順番に上の列へ並べ、その同じ $n$ 項を逆順に下の列へ並べる。このとき、どちらの列も $n$ 項からできているため、それぞれの和は $S_n$ である。ここで、上下に対応する項どうしの和を考える。

ここで、 $1 \leq k \leq n$ を満たす整数 $k$ について、第 $k$ 項と逆順に対応する第 $n+1-k$ 項を考える。

等差数列の一般項より、 $a_k = a_1 + (k-1)d$ であり、 $a_{n+1-k} = a_1 + (n-k)d$ である。

したがって、対応する 2 項の和は、

$$\begin{aligned} a_k + a_{n+1-k} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d \\ &= 2a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

となる。

一方、末項は、 $a_n = a_1 + (n-1)d$ であるから、

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d \\ &= 2a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

となる。

よって、どの対応する 2 項を選んでも、その和は $a_1 + a_n$ になる。

上下 2 列を足したものは、上の列も下の列も同じ $S_n$ であるため、合計は $2S_n$ である。また、対応する組は第 1 項から第 $n$ 項までの $n$ 個あるので、 $2S_n = n(a_1 + a_n)$ となる。

したがって、 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ を得る。

さらに、 $a_n = a_1 + (n-1)d$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
 &= \frac{n\{a_1 + a_1 + (n-1)d\}}{2} \\
 &= \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$n$ が奇数の場合でも、中央の項は上下それぞれの列に1つずつ並び、同じ値どうしが対応する。そのため、中央の項を含めてすべての対応する項の和が $a_1 + a_n$ になる。上下2列の合計は $2S_n$ として数えているため、最後に2で割ることで正しい和が得られる。

$n = 1$ の場合は、1つの項だけの和なので $S_1 = a_1$ である。2列に並べて考えると、上下には同じ $a_1$ が並ぶため、対応する和は $a_1 + a_1$ になる。したがって、公式は $2S_1 = 1(a_1 + a_1)$ となり、 $S_1 = a_1$ と一致する。

$$\begin{array}{ccccc}
 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\
 + & + & + & + & + \\
 11 & 9 & 7 & 5 & 3 \\
 \hline
 14 & 14 & 14 & 14 & 14
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} 3 \\ + \\ 11 \end{array}} \right\} 2S$$

14が5組

$$2S = 5 \times 14$$

図1 上段と下段は同じ5項を逆順に並べたもので、各段の和は $S=35$ である。縦の和はすべて14となり、2段分の和 $2S$ は14の5組分である。

### 等差数列の和の公式

等差数列の初めの $n$ 項の和は、次の公式で求める。

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

また、一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$ を使うと、

$$S_n = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

となる。

$n = 1$ の場合でも公式は成り立つ。実際、 $S_1 = \frac{1(a_1 + a_1)}{2} = a_1$ となり、1項だけの和と一致する。

また、公差  $d = 0$  の場合は全ての項が  $a_1$  であるため、 $S_n = na_1$  となる。一方、公式では  $a_n = a_1$  なので、 $S_n = \frac{n(a_1 + a_1)}{2} = na_1$  となり一致する。

### 注意

等差数列の項には負の値が含まれていてもよい。和は符号を含めて計算するため、すべての項を正の量として扱ってはいけない。

また、等差数列の和は項の合計であり、面積や絶対値の大きさを表すものではない。

### 例題 1

初項が3、公差が2である等差数列の初めの5項の和を求めよ。

### 例題 1 の解答・解説

等差数列の初めの5項は、3, 5, 7, 9, 11である。

公式を使うと、初項  $a_1 = 3$ 、末項  $a_5 = 11$ 、項数  $n = 5$  であるから、 $S_5 = \frac{5(3+11)}{2} = 35$  となる。

有限項で確認すると、 $3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$  であり、公式による値と一致する。

項数、初項、末項を正しく読み取ることが重要である。

### 例題 2

初項が12、公差が-2である等差数列の初めの8項の和を求めよ。

### 例題 2 の解答・解説

第8項を求める。

$$a_8 = 12 + (8 - 1)(-2) = 12 - 14 = -2$$

したがって、初項  $a_1 = 12$ 、末項  $a_8 = -2$ 、項数  $n = 8$  である。

$$S_8 = \frac{8(12 + (-2))}{2} = 40$$

途中の項は、12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2であり、0 や負の項を含む。

有限項で確認すると、 $12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2) = 40$  となる。

公差が負の場合でも、公式の中の符号をそのまま扱うことが大切である。

### 例題 3

初項が3、公差が3である等差数列について、3から27までの項をすべて加えた和を求めよ。

### 例題 3 の解答・解説

まず、27が何番目の項かを確認する。

一般項より、 $a_n = 3 + (n - 1)3$ である。

したがって、 $27 = 3 + 3(n - 1)$ より、 $n = 9$ となる。

つまり、加える項数は9個である。

初項 $a_1 = 3$ 、末項 $a_9 = 27$ 、項数 $n = 9$ なので、

$$S_9 = \frac{9(3 + 27)}{2} = 135$$

となる。

有限項で確認すると、 $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 135$ であり、公式による値と一致する。

「最後の値が何番目の項か」を先に確かめてから和の公式を使うことが重要である。

### 演習問題

#### 練習問題 1

初項が5、公差が3である等差数列の初めの10項の和を求めよ。

#### 練習問題 2

等差数列の初めの7項について、初項が18、末項が6である。この7項の和を求めよ。

#### 練習問題 3

初項が4、公差が-3である等差数列の初めの9項の和を求めよ。

#### 練習問題 4

初項が $\frac{1}{2}$ 、公差が $\frac{1}{2}$ である等差数列の初めの6項の和を求めよ。

#### 練習問題 5

ある等差数列で、初項が7、公差が4である。末項が43になるまでの項数を求め、その和を求めよ。

#### 練習問題 6

初項が9、公差が0である等差数列について、初めの1項の和 $S_1$ と初めの5項の和 $S_5$ をそれぞれ求めよ。

**練習問題 7**

初項が2、公差が2である等差数列について、中央の項を意識して初めの5項の和を求めよ。また、中央の項と和 $S_5$ を混同しないように、それぞれ何を表すか説明せよ。

**練習問題 8**

ある等差数列で、第8項が20、初項が6である。この8項の和を求めるとき、 $a_8$ と $S_8$ を混同しないようにして計算せよ。

**練習問題 1 の解答・解説**

初項 $a_1 = 5$ 、公差 $d = 3$ 、項数 $n = 10$ である。

まず末項を求める。

$$a_{10} = 5 + (10 - 1)3 = 32$$

したがって、 $S_{10} = \frac{10(5+32)}{2} = 185$ となる。

有限項で確認すると、5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32であり、 $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32 = 185$ となる。

初項は最初の項、末項は最後の項、項数は加える項の個数を表している。

**練習問題 2 の解答・解説**

初項 $a_1 = 18$ 、末項 $a_7 = 6$ 、項数 $n = 7$ である。

初項と末項が分かっているため、 $S_7 = \frac{7(18+6)}{2} = 84$ となる。

有限項を確認すると、公差は $d = \frac{6-18}{7-1} = -2$ であるから、18, 16, 14, 12, 10, 8, 6となる。

実際に加えると、 $18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 = 84$ となる。

末項が分かる場合は、無理に一般項を作らず、初項・末項・項数を公式に使うとよい。

**練習問題 3 の解答・解説**

初項 $a_1 = 4$ 、公差 $d = -3$ 、項数 $n = 9$ である。

末項は、 $a_9 = 4 + (9 - 1)(-3) = -20$ である。

したがって、 $S_9 = \frac{9(4+(-20))}{2} = -72$ となる。

有限項で確認すると、4, 1, -2, -5, -8, -11, -14, -17, -20であり、 $4 + 1 - 2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17 - 20 = -72$ となる。

負の項を含んでも、符号をそのまま使って和を計算する。

**練習問題 4 の解答・解説**

初項 $a_1 = \frac{1}{2}$ 、公差 $d = \frac{1}{2}$ 、項数 $n = 6$ である。

末項は、 $a_6 = \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3$ となる。

したがって、

$$S_6 = \frac{6\left(\frac{1}{2} + 3\right)}{2} = \frac{21}{2}$$

となる。

有限項で確認すると、 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$ であり、 $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 = \frac{21}{2}$ となる。

分数の場合も、初項・末項・項数を正しく読み取れば同じ公式を使える。

### 練習問題 5 の解答・解説

初項 $a_1 = 7$ 、公差 $d = 4$ である。

末項が 43 なので、 $43 = 7 + (n - 1)4$ を解く。

$36 = 4(n - 1)$ より、 $n - 1 = 9$ 。したがって、 $n = 10$ である。

10 項の和は、 $S_{10} = \frac{10(7+43)}{2} = 250$ となる。

有限項を確認すると、7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43であり、最後が 43 になる 10 個の項であることが確認できる。

和を求める前に項数を確定することが重要である。

### 練習問題 6 の解答・解説

公差が 0 の場合、すべての項が同じ値になる。

初項 $a_1 = 9$ 、公差 $d = 0$ である。

1 項の場合は、 $S_1 = \frac{1(9+9)}{2} = 9$ となる。

5 項の場合は、 $S_5 = \frac{5(9+9)}{2} = 45$ となる。

有限項で確認すると、 $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$ であり一致する。

公差が 0 でも等差数列であり、公式はそのまま利用できる。

### 練習問題 7 の解答・解説

初項 $a_1 = 2$ 、公差 $d = 2$ である。

初めの 5 項は、2, 4, 6, 8, 10である。

中央の項は第 3 項なので、 $a_3 = 6$ である。

一方、 $S_5$ は 5 項すべての合計を表す。

直接足すと、 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$ となる。

この和は、外側から対応させると、 $2 + 10 = 12$

$4 + 8 = 12$ となり、中央の項 6 を 1 回加えることで、 $12 + 12 + 6 = 30$

と考えられる。

逆順に並べた 2 列を使う公式では、中央の項 6 は上下の両方に現れるため 2 回数えられる。しかし、この 2 列の合計は $2S_5$ を表しており、最後に 2 で割るため、中央項の二重計上は正しく処理される。

公式を使うと、 $S_5 = \frac{5(2+10)}{2} = 30$ となり、直接計算の結果と一致する。

$a_3 = 6$ は 1 つの項を表し、 $S_5 = 30$ は 5 項全体の合計を表すため、両者を混同してはいけない。

### 練習問題 8 の解答・解説

初項 $a_1 = 6$ 、第 8 項 $a_8 = 20$ である。

$a_8$ は第 8 項という 1 つの値を表す。一方、 $S_8$ は第 1 項から第 8 項までの合計である。

まず項数は 8 個なので、 $S_8 = \frac{8(6+20)}{2} = 104$ となる。

有限項を確認する。

公差は、 $20 = 6 + 7d$ より、 $d = 2$ である。

したがって、6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20となり、 $6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 104$ である。

$a_8 = 20$ と答えてしまうと最後の 1 項だけを答えており、和 $S_8$ を求めたことにはならない。