# 第 029 講 ばねの力と弾性エネルギー

**この講でできるようになること**

- 自然長からの伸び縮みを符号付きの変位で表し、ばねが物体に及ぼす力の大きさと向きを判断できる。
- ばねの力と、ゆっくり伸縮させるために加える外力を区別し、力–変位グラフの面積から仕事を求められる。
- ばねに蓄えられる弾性エネルギーとその変化を、伸長・圧縮の両方について計算できる。
- ばねの力がする仕事と運動エネルギーの変化を結び付け、条件に応じて式を使い分けられる。

## 1. ばねは伸ばしても縮めても元の長さに戻ろうとする

ばねを手で伸ばすと、手を引き戻す力を感じる。一方、ばねを押し縮めると、今度は手を押し返す力を感じる。伸ばした場合と縮めた場合では力の向きが反対になるが、どちらも元の長さに戻ろうとする働きである。

この力を利用すれば物体を動かせる。さらに、伸ばしたり縮めたりしたばねは、後で物体に仕事をする能力を持つ。これが、ばねにエネルギーが蓄えられるということである。

ただし、ばねの力とエネルギーを計算するときは、ばね全体の長さと、元の長さからどれだけ変わったかを区別する必要がある。

### 自然長を基準に伸び縮みを測る

ばねに伸縮させる力を加えていないときの長さを**自然長**という。

自然長を $l_0$、伸縮後の長さを $l$ とする。ばねの固定端から可動端へ向かう方向を正として、自然長からの符号付き変位 $x$ を次のように定める。

**自然長からの変位**

$$x = l - l_0$$

- $l_0$：ばねの自然長（単位 m）
- $l$：そのときのばねの長さ（単位 m）
- $x$：自然長からの符号付き変位（単位 m）

この座標の取り方では、伸長は $x > 0$、圧縮は $x < 0$、自然長は $x = 0$ となる。

例えば自然長が 0.30 m のばねについて考える。

| 状態 | ばねの長さ $l$ | 変位 $x$ |
|---|---|---|
| 伸長 | 0.35 m | +0.05 m |
| 自然長 | 0.30 m | 0 m |
| 圧縮 | 0.25 m | −0.05 m |

伸び縮みの大きさを知りたい場合は、$x$ の絶対値 $|x|$ を用いる。

この表では、伸長した状態も圧縮した状態も、自然長からの変化の大きさは 0.05 m である。ただし、変位の符号が違うため、ばねが物体に及ぼす力の向きは反対になる。

# 2. ばねの力を表すフックの法則

## 伸び縮みに比例する力

適用範囲内の理想的なばねでは、自然長からの変位の大きさが 2 倍になると、ばねの力の大きさも 2 倍になる。この関係を**フックの法則**という。

ばねの変形しにくさを表す正の定数を、ばね定数 $k$ とする。$k$ が大きいほど、同じ長さだけ伸ばしたり縮めたりするために大きな力が必要になる。

ばねが端につながった物体に及ぼす力を $F_{\mathrm{s}}$ とすると、次の関係が成り立つ。

**フックの法則**

$$F_{\mathrm{s}} = -kx$$

- $F_{\mathrm{s}}$：ばねが物体に及ぼす力（単位 N）
- $k$：ばね定数（単位 $\mathrm{\frac{N}{m}}$、$k > 0$）
- $x$：自然長からの符号付き変位（単位 m）

力の大きさは $k\,|x|$ である。

式の負号は、ばねの力が自然長へ戻す向きに働くことを表す。

| ばねの状態 | 変位 $x$ | ばねの力 $F_{\mathrm{s}}$ | 力の向き |
|---|---|---|---|
| 伸長 | 正 | 負 | 自然長へ戻す向き |
| 自然長 | 0 | 0 | ばねの力は 0 |
| 圧縮 | 負 | 正 | 自然長へ戻す向き |

特に注意したいのは圧縮の場合である。$x$ が負なので、$F_{\mathrm{s}} = -kx$ は正となる。つまり、縮められたばねは端の物体を正方向へ押し出す。

## ばねと物体の模式図

次の図は、左側を固定し、右端の物体 A につながった水平ばねを自然長より伸ばした状態である。

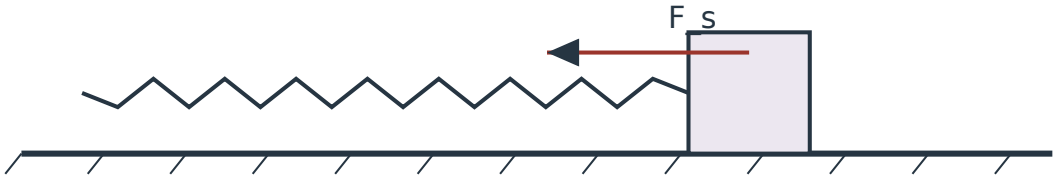


**図 1**　自然長より伸ばした水平ばねと物体 A。ばね力だけの部分図。

図の左側のばね端は固定されており、右向きを正方向とする。物体 A は自然長に対応する位置より右にあるため、$x > 0$ である。したがって、ばねが物体 A を引く力 $F_{\mathrm{s}}$ は左向きとなる。

この図は、ばねの伸長状態と力の向きを表す部分模式図であり、物体 A に働くすべての力を示した図ではない。矢印はばねの形と重ならない位置に描いてあり、矢印の始点は実際の力の作用点を指定するものではない。また、矢印の長さも模式的であり、後に示すグラフの力の数値とは直接対応しない。

### フックの法則を使える範囲

実際のばねは、どこまでも同じ比例関係を保つわけではない。大きく変形させると元の長さに戻らなくなったり、力と変位の比例関係が成り立たなくなったりする。

本講では、ばね自身の質量を無視でき、伸縮が弾性限界内にある理想的な線形ばねを扱う。したがって、比例関係が成立する範囲内で $F_{\mathrm{s}} = -kx$ を用いる。

## 3. ばねの力と外から加える力は反対向き

ばねを自然長からゆっくり伸ばす場合を考える。ばねは物体を元へ戻そうとするので、外からはそれに逆らう向きの力を加える必要がある。

ここで、物体に働くばね軸方向の力が、ばねの力と手などによる外力だけであるとする。物体を十分ゆっくり動かし、加速度による効果を無視できる状態を**準静的な伸縮**と呼ぶ。

準静的な伸縮では、各位置でばねの力と外力がつり合うとみなせる。

$$F_{\mathrm{ext}} + F_{\mathrm{s}} = 0$$

ここで $F_{\mathrm{s}} = -kx$ を代入すると、外力は次のようになる。

$$F_{\mathrm{ext}} = kx$$

- $F_{\mathrm{s}} = -kx$：ばねが物体に及ぼす力

・$F_{\text{ext}} = kx$：ばねを準静的に伸縮させる外力

両者は同じ大きさで反対向きである。

伸長させるときは、外力が正方向、ばねの力が負方向に働く。反対に圧縮するときは、外力が負方向、ばねの力が正方向に働く。

**外力とばねの力を混同しない**

$F_{\text{s}} = -kx$ は、ばねが端の物体に及ぼす力の式である。一方、$F_{\text{ext}} = kx$ は、他の軸方向の力がなく、加速度を無視できる準静的な状態で成り立つ式である。

物体を急に動かすとき、外力とばねの力が常につり合うとは限らない。その場合、外力を無条件に $kx$ として計算してはならない。

## 4. 力–変位グラフの面積が仕事を表す

### ばねの力は変位とともに変わる

一定の力が移動方向に働く場合、仕事は力の大きさと移動距離の積で求められる。しかし、ばねを伸ばすと、自然長付近では必要な力が小さく、伸びが大きくなるほど必要な力も大きくなる。

したがって、伸ばし終わったときの力を、そのまま全移動距離に掛けることはできない。

力が変化する場合には、力–変位グラフと横軸で囲まれた部分の面積から仕事を求める。

ここで重要なのは、**力の符号と移動方向を考慮した符号付きの面積**である。

### 外力とばねの力のグラフ

ばね定数が $k = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$ のばねを考える。

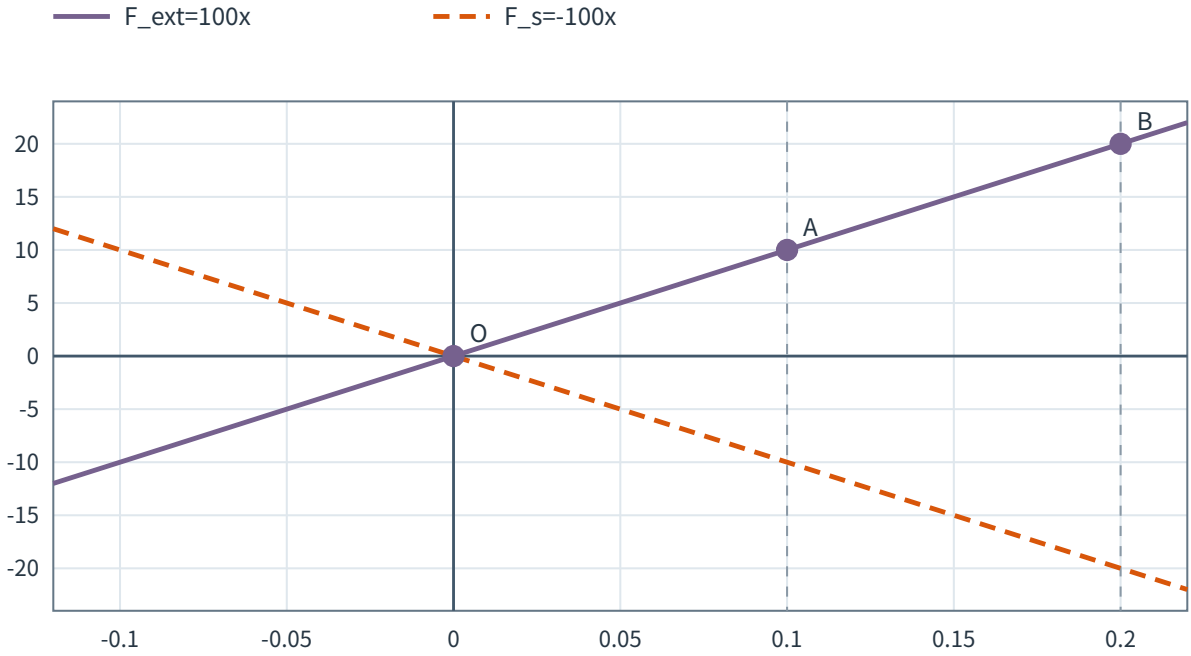


**図 2**　横軸は自然長からの変位 x(m)、縦軸は力 F(N)。準静的外力は実線、ばねの力は破線。

グラフの横軸は自然長からの符号付き変位 $x$ であり、単位は m である。縦軸は符号付きの力 $F$ であり、単位は N である。

グラフ作成上の縦座標を力として読み、実線を $F_{\text{ext}}$、破線を $F_{\text{s}}$ と区別する。グラフは物体の移動経路やばねの形を描いたものではない。

実線は準静的に加える外力を表す。

$$F_{\text{ext}} = kx$$

破線はばねが物体に及ぼす力を表す。

$$F_{\text{s}} = -kx$$

同じ変位でも、2 本の直線の力は正負が反対である。

### 自然長から伸ばす場合の仕事

自然長の点 O から、$x = +0.10\,\text{m}$ の点 A までゆっくり伸ばす場合を考える。

実線上の点 A では外力は $+10\,\text{N}$ である。点 A から横軸に垂線を下ろした足を P とすると、外力のする仕事は、O・A・P で囲まれた三角形の面積に等しい。

底辺が $0.10\,\text{m}$、高さが $10\,\text{N}$ なので、外力の仕事 $W_{\text{ext}}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{1}{2}(0.10\,\text{m})(10\,\text{N}) \\ &= +0.50\,\text{J} \end{aligned}$$

仕事の単位は $\text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$ である。

一方、ばねの力は伸長中ずっと移動方向と反対向きなので、ばねがする仕事 $W_{\text{s}}$ は次のようになる。

$$W_{\text{s}} = -0.50\,\text{J}$$

つまり、準静的に伸ばすとき、外力がする正の仕事と、ばねがする負の仕事は符号が反対になる。

ここで、最後の力 $10\,\text{N}$ を全移動距離 $0.10\,\text{m}$ に掛けると $1.0\,\text{J}$ になるが、これは誤りである。外力は最初の $0\,\text{N}$ から最後の $10\,\text{N}$ まで直線的に増加するので、区間の平均の力は $5\,\text{N}$ となる。

### 圧縮したときの仕事の符号

自然長から $x = -0.10\,\text{m}$ までゆっくり圧縮するときは、外力が負方向、物体の変位も負方向である。

このとき外力と移動の向きが一致するため、外力の仕事は正になる。

ばね定数が同じ $100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ なら、外力の仕事は $+0.50\,\text{J}$、ばねの仕事は $-0.50\,\text{J}$ である。

一方、圧縮した状態から自然長へ戻すときには、ばねの力が正方向、物体の変位も正方向となるため、ばねは正の仕事をする。

したがって、仕事の正負を決めるときは、力の符号だけでなく、どちらからどちらへ動いたかも確認する必要がある。

## 5. ばねに蓄えられる弾性エネルギー

### 仕事がエネルギーとして蓄えられる

自然長のばねをゆっくり伸ばしたり縮めたりするには、外から仕事をする必要がある。

理想的なばねでは、この仕事に対応するエネルギーをばねに蓄えられたものとして表せる。このエネルギーを**弾性エネルギー**といい、$U$ で表す。

本講では自然長の状態をエネルギーの基準に選び、$x = 0$ のとき $U = 0$ と定める。

自然長から変位 $x$ まで準静的に伸縮させる外力の仕事は、力–変位グラフの三角形の面積で求められる。

力の大きさは自然長で 0、変位の大きさが $|x|$ のとき $k|x|$ となるので、仕事に対応する蓄積エネルギーは次のようになる。

$$U = \frac{1}{2}\,|x|\cdot k\,|x|$$

ここで $|x|^2 = x^2$ なので、次の式が得られる。

**ばねの弾性エネルギー**

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

- $U$：自然長をゼロとした弾性エネルギー（単位 J）
- $k$：ばね定数（単位 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$）
- $x$：自然長からの符号付き変位（単位 m）

この式の特徴は、変位が二乗されていることである。

伸長では $x>0$、圧縮では $x<0$ だが、どちらも $x^2$ は正になる。したがって、自然長を基準とした弾性エネルギーは負にならない。

また、同じばねを同じ大きさだけ伸ばした場合と縮めた場合では、弾性エネルギーは等しくなる。

## 弾性エネルギーのグラフ

ばね定数 $k=100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ の場合は、$x$ を m 単位の数値で表すと、$U$ の J 単位の数値は $50x^2$ となる。

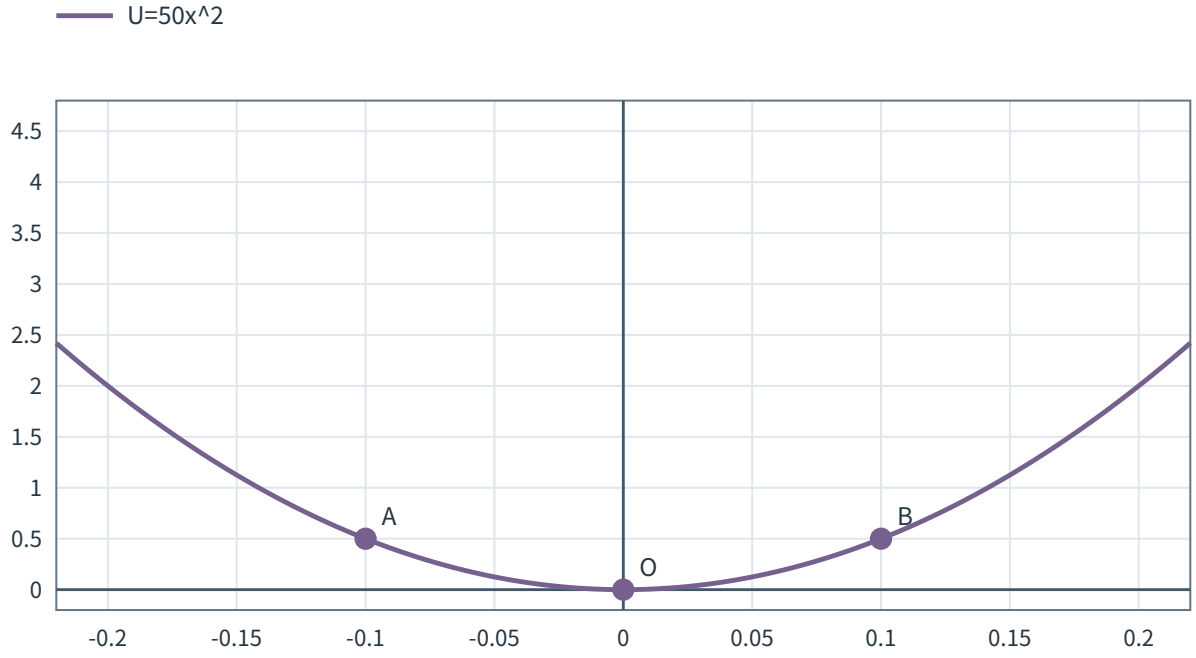


**図 3**　k=100 N/m、横軸 x(m)、縦軸 U(J)。自然長をゼロとした弾性エネルギー。

横軸は変位 $x$（単位 m）、縦軸は弾性エネルギー $U$（単位 J）である。縦軸の数値は力ではなくエネルギーを表す。

グラフは自然長に対応する原点 O で最小となり、正負どちらの方向へ変位が大きくなっても、弾性エネルギーが増加する。

点 A と点 B は、変位がそれぞれ $-0.10\,\mathrm{m}$ と $+0.10\,\mathrm{m}$ であり、どちらの弾性エネルギーも $0.50\,\mathrm{J}$ となる。

同様に、変位の大きさが $0.20\,\mathrm{m}$ のときには $2.0\,\mathrm{J}$ となる。変位の大きさを 2 倍にすると、弾性エネルギーは 4 倍になるのである。

なお、横軸と縦軸では単位も目盛の尺度も異なる。この曲線の見た目の形から、実際のばねの形や空間的な角度を読み取ってはならない。

## 6. 弾性エネルギーの変化とばねがする仕事

### 初めと終わりのエネルギーを比べる

ばねが初めの変位 $x_{\mathrm{A}}$ から、終わりの変位 $x_{\mathrm{B}}$ まで変化したとする。

初めの弾性エネルギーを $U_{\mathrm{A}}$、終わりの弾性エネルギーを $U_{\mathrm{B}}$ とすると、それぞれ次のように表せる。

$$U_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^2$$

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^2$$

弾性エネルギーの変化量 $\Delta U$ は「終わりから初めを引く」ので、次のようになる。

$$\Delta U = U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}$$

したがって、

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x_{\mathrm{B}}^2 - x_{\mathrm{A}}^2\right)$$

となる。

**変位の差をそのまま二乗しない**

弾性エネルギーの変化を計算するときは、初めと終わりの変位をそれぞれ二乗してから差を取る。

正しい式は $\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x_{\mathrm{B}}^2 - x_{\mathrm{A}}^2\right)$ であり、一般には $\frac{1}{2}k(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2$ とはならない。

### ばねの仕事とエネルギーの関係

ばねが物体にする仕事を $W_{\mathrm{s}}$ とする。

ばねが物体を押したり引いたりして正の仕事をすれば、ばねに蓄えられた弾性エネルギーは減少する。反対に、ばねが物体の動く向きと逆向きに力を及ぼして負の仕事をすれば、弾性エネルギーは増加する。

したがって、次の関係が成り立つ。

$$W_{\mathrm{s}} = -\Delta U$$

すなわち、

$$W_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}k\left(x_{\mathrm{A}}^2 - x_{\mathrm{B}}^2\right)$$

である。

この関係は、ばねに関する理想化が成り立つ範囲では、物体をゆっくり動かした場合にも速く動かした場合にも使える。

### 準静的な外力の仕事との違い

他の軸方向の力がなく、ばねを準静的に伸縮させる場合には、外力の仕事は弾性エネルギーの増加量に等しい。

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta U$$

しかし、物体が加速する場合、外力の仕事がすべて弾性エネルギーに変わるとは限らない。

運動エネルギーを $K$、その変化を $\Delta K$ とし、外力とばねの力以外に仕事をする力がないとする。仕事と運動エネルギーの関係から、

$$W_{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{s}} = \Delta K$$

となる。

$W_{\mathrm{s}} = -\Delta U$ を代入すると、

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta U + \Delta K$$

が得られる。

この式は、加えた仕事が弾性エネルギーの変化だけでなく、運動エネルギーの変化にも関係することを表す。

摩擦など、ほかにも仕事をする力がある場合は、その仕事も考慮する必要がある。

---

**ばねの問題で最初に確認すること**

ばねが物体に及ぼす力を求めるなら、自然長からの符号付き変位を使って $F_{\mathrm{s}} = -kx$ とする。

蓄えられたエネルギーを求めるなら、$U = \frac{1}{2}kx^2$ とする。ばねがする仕事を求めるなら、初めと終わりのエネルギーの差から $W_{\mathrm{s}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}}$ を使う。

外力の仕事を求める場合は、準静的な条件が成り立つかを先に判断する。

---

## 7. 例題で確かめる

**1**

自然長 0.30 m、ばね定数 200 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねがある。ばねの固定端から可動端へ向かう右向きを正とする。

(1) ばねの長さが 0.35 m のとき、自然長からの変位、ばねが端の物体に及ぼす力、弾性エネルギーを求めよ。

(2) ばねの長さが 0.25 m のとき、同じ 3 つの量を求めよ。

**解答・解説**

(1) 自然長より長いので伸長している。変位は次のようになる。

$$x = 0.35\,\mathrm{m} - 0.30\,\mathrm{m} = +0.05\,\mathrm{m}$$

ばねの力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(+0.05\,\mathrm{m}) \\ &= -10\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。負号は左向きに 10 N の力が働くことを表す。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.05\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

(2) 自然長より短いので圧縮している。

$$x = 0.25\,\mathrm{m} - 0.30\,\mathrm{m} = -0.05\,\mathrm{m}$$

したがって、ばねの力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.05\,\mathrm{m}) \\ &= +10\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。正号は右向きに 10 N の力が働くことを表す。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.05\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

伸長と圧縮では力の向きが反対になる。しかし、自然長からの変位の大きさが等しいため、弾性エネルギーは等しい。

**2**

ばね定数 $100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねを、自然長から $+0.10\,\mathrm{m}$ までゆっくり伸ばした。ばね軸方向には、ばねの力と外力だけが働くものとする。

(1) 伸ばし終わった位置での外力を求めよ。

(2) 外力がした仕事を力–変位グラフの面積から求めよ。

(3) 同じ区間でばねがした仕事を求めよ。

**解答・解説**

(1) 準静的なので、外力は $F_{\mathrm{ext}} = kx$ となる。

$$F_{\mathrm{ext}} = \left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(+0.10\,\mathrm{m})$$
$$= +10\,\mathrm{N}$$

(2) 外力は最初の $0\,\mathrm{N}$ から最後の $10\,\mathrm{N}$ まで直線的に増加する。

力–変位グラフでは、横軸上の $x = 0\,\mathrm{m}$ から $x = 0.10\,\mathrm{m}$ までを底辺とし、終点の $F_{\mathrm{ext}} = 10\,\mathrm{N}$ を高さとする三角形になる。

したがって、

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}(0.10\,\mathrm{m})(10\,\mathrm{N})$$
$$= +0.50\,\mathrm{J}$$

となる。

(3) ばねの力は伸長中ずっと移動方向と反対向きであり、外力と正負が反対である。

したがって、

$$W_{\mathrm{s}} = -0.50\,\mathrm{J}$$

となる。

外力の仕事を $(10\,\mathrm{N})(0.10\,\mathrm{m}) = 1.0\,\mathrm{J}$ とすると、終点の力が最初から最後まで一定だったと誤って仮定したことになる。変化する力ではグラフの面積を使う必要がある。

**3**

ばね定数 $100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねについて、自然長からの変位を $x_{\mathrm{A}} = +0.10\,\mathrm{m}$ から $x_{\mathrm{B}} = +0.20\,\mathrm{m}$ まで変化させた。右向きを正とする。

(1) 初めと終わりの弾性エネルギーを求めよ。

(2) 弾性エネルギーの変化量と、ばねがした仕事を求めよ。

(3) 準静的に動かした場合、外力がする仕事を力–変位グラフの台形の面積から確かめよ。

**解答・解説**

(1) 初めの弾性エネルギーは、

$$U_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.10\,\mathrm{m})^2$$
$$= 0.50\,\mathrm{J}$$

となる。

終わりの弾性エネルギーは、

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.20\,\mathrm{m})^2$$
$$= 2.0\,\mathrm{J}$$

となる。

(2) 弾性エネルギーの変化は、

$$\Delta U = 2.0\,\mathrm{J} - 0.50\,\mathrm{J}$$
$$= +1.5\,\mathrm{J}$$

である。

ばねがする仕事は、

$$W_{\mathrm{s}} = -\Delta U = -1.5\,\mathrm{J}$$

となる。さらに伸ばされるため、ばねの力は移動方向と反対向きに働く。

(3) 先ほどの力–変位グラフの実線について、点 A から点 B までを見る。

点 A の外力は 10 N、点 B の外力は 20 N である。それぞれの点から横軸に下ろした垂線と、実線の区間 AB、横軸で囲まれた台形を考える。

台形の平行な 2 辺はそれぞれ 10 N と 20 N、その間隔は 0.10 m である。

したがって、

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{10\,\mathrm{N} + 20\,\mathrm{N}}{2}(0.20\,\mathrm{m} - 0.10\,\mathrm{m})$$
$$= (15\,\mathrm{N})(0.10\,\mathrm{m})$$
$$= +1.5\,\mathrm{J}$$

となる。

準静的な外力の仕事は $\Delta U = +1.5\,\mathrm{J}$ と一致する。ここで必要なのは、初めと終わりの弾性エネルギーの差であり、単に変位の差を二乗する計算ではない。

## 8. 演習問題

特に断りがない限り、ばねは弾性限界内の理想的な線形ばねとし、ばね自身の質量は無視する。自然長を弾性エネルギーのゼロとし、ばねの固定端から可動端へ向かう方向を正とする。

**1**

自然長 0.24 m、ばね定数 150 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねがある。

(1) ばねの長さが 0.28 m のとき、自然長からの変位を求めよ。

(2) このとき、ばねが端の物体に及ぼす力と弾性エネルギーを求めよ。

(3) ばねの長さを 0.20 m に変えた場合、力の向きと大きさ、弾性エネルギーを求めよ。また、(2) との違いを説明せよ。

**2**

ばね定数 120 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねを、自然長から +0.050 m までゆっくり伸ばす。ばね軸方向には、ばねの力と外力だけが働くものとする。

(1) 伸ばし終わった位置での外力を求めよ。

(2) 外力がした仕事を、力–変位グラフの面積の考え方を使って求めよ。

(3) 終点の外力に全移動距離を掛ける計算が誤りとなる理由を説明せよ。

(4) この区間でばねがした仕事を求めよ。

**3**

ばね定数 150 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねについて、自然長からの変位を +0.040 m から +0.120 m まで変化させた。

(1) 初めと終わりの弾性エネルギーをそれぞれ求めよ。

(2) 弾性エネルギーの変化量と、ばねがした仕事を求めよ。

(3) 準静的に伸ばした場合の外力の仕事を、区間の初めと終わりの外力から台形の面積として求め、(2)と比較せよ。

**4**

ばね定数 250 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねを自然長から 0.040 m 圧縮した。右向きを正としている。

(1) 圧縮状態での符号付き変位と、ばねが物体に及ぼす力を求めよ。

(2) 圧縮状態での弾性エネルギーを求めよ。

(3) このばねを圧縮状態から自然長まで戻した。この間にばねが物体にした仕事を求めよ。

(4) ばね軸方向にほかの力がなく、外力を加えて準静的に自然長まで戻した場合、外力がした仕事を求めよ。

©ミライコーチング

**5**

ばね定数 $100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ のばねについて、自然長からの変位を $-0.080\,\mathrm{m}$ から $+0.120\,\mathrm{m}$ まで連続的に変化させた。ばね軸方向の運動を考える。

(1) 初めと終わりの弾性エネルギーをそれぞれ求めよ。

(2) 自然長に達するまでにばねがした仕事を求めよ。

(3) 自然長から終点までにばねがした仕事を求めよ。

(4) 全区間でばねがした仕事を求めよ。また、変位の差だけから $\frac{1}{2}k(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2$ を計算しても、弾性エネルギーの変化量にならないことを説明せよ。

**6**

自然長 $0.20\,\mathrm{m}$ のばねをゆっくり伸ばしたところ、ばねの長さが $0.24\,\mathrm{m}$ のとき、外力の大きさが $8.0\,\mathrm{N}$ であった。ばね軸方向には、ばねの力と外力だけが働くものとする。測定した範囲でフックの法則が成り立つ。

(1) 自然長からの伸びを m 単位で求めよ。

(2) ばね定数を求めよ。

(3) この位置でばねに蓄えられている弾性エネルギーを求めよ。

(4) ばねの長さ $0.24\,\mathrm{m}$ をそのまま弾性エネルギーの式の $x$ に代入してはいけない理由を説明せよ。

**7**

自然長を基準とした理想的なばねについて考える。

(1) 同じばねで、自然長からの変位の大きさを 2 倍にしたとき、ばねの力の大きさと弾性エネルギーはそれぞれ何倍になるか。

(2) 自然長からの変位を同じに保ち、ばね定数だけを 2 倍にしたとき、ばねの力の大きさと弾性エネルギーはそれぞれ何倍になるか。

(3) ばね定数が $200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ で、弾性エネルギーが $0.36\,\mathrm{J}$ であった。自然長からの符号付き変位として考えられる値をすべて求めよ。

(4) (3)で変位の符号を一意に決められない理由を説明せよ。

©ミライコーチング

### 8

質量 0.50 kg の物体 A が、水平な摩擦のない面の上で、ばね定数 200 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ の水平ばねに接続されている。ばねの左端は固定されており、右向きを正とする。

初め、ばねを自然長から 0.050 m 圧縮して物体 A を静止させていた。この状態から、物体 A に余分な仕事を与えず静かに手を離した。

物体 A が自然長に対応する位置に到達するまで、ばねの力だけが水平方向の仕事をするものとする。

(1) 初めのばねの弾性エネルギーを求めよ。

(2) 初めの位置から自然長に対応する位置までに、ばねが物体 A にした仕事を求めよ。

(3) 物体 A が自然長に対応する位置に到達したときの速さを求めよ。

(4) 自然長に対応する位置ではばねの力が 0 N になる。それでも物体 A の速さが 0 m/s とは限らない理由を説明せよ。

### 9

ばね定数 100 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ の水平ばねに接続された物体が、水平で摩擦のない面上にある。ばねの固定端から可動端へ向かう右向きを正とする。

初め、ばねは自然長で、物体は静止していた。その後、外力を加えて物体を動かし、自然長からの変位を 0 m から +0.10 m にした。

この間に外力が物体にした仕事は +0.80 J であり、ばねの力と外力以外に仕事をする力はない。

(1) 初めと終わりの弾性エネルギー、および弾性エネルギーの変化量を求めよ。

(2) この区間でばねが物体にした仕事を求めよ。

(3) 物体の運動エネルギーの変化量を求めよ。

(4) 外力の仕事を弾性エネルギーの変化量だけで表せない理由を説明せよ。

## 演習問題の解答・解説

### 1

**(1)** 自然長からの変位は、伸縮後の長さから自然長を引く。

$$
\begin{aligned}
x &= 0.28\,\mathrm{m} - 0.24\,\mathrm{m} \\
&= +0.040\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

**答え：**$+0.040\,\mathrm{m}$

**(2)** ばねが物体に及ぼす力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -\left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(+0.040\,\mathrm{m}) \\ &= -6.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。したがって、負方向に $6.0\,\mathrm{N}$ である。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.040\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：ばねの力** $-6.0\,\mathrm{N}$**、弾性エネルギー** $0.12\,\mathrm{J}$

**(3)** 長さが $0.20\,\mathrm{m}$ の場合、自然長より短いので圧縮状態である。

$$\begin{aligned} x &= 0.20\,\mathrm{m} - 0.24\,\mathrm{m} \\ &= -0.040\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

ばねが物体に及ぼす力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -\left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.040\,\mathrm{m}) \\ &= +6.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。したがって、正方向に $6.0\,\mathrm{N}$ である。

弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.040\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

(2)と比べると、変位の大きさは同じで符号だけが反対である。そのため、力は反対向きで大きさが等しく、弾性エネルギーは等しい。

**答え：ばねの力** $+6.0\,\mathrm{N}$**、弾性エネルギー** $0.12\,\mathrm{J}$**。力の向きだけが反対になる。**

## 2

**(1)** ゆっくり伸ばし、ほかの軸方向の力がないので、外力は $F_{\mathrm{ext}} = kx$ となる。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{ext}} &= \left(120\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(+0.050\,\mathrm{m}) \\ &= +6.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

**答え：**+6.0 N

**(2)** 自然長では外力が 0 N、終点では 6.0 N である。

横軸を変位 $x$（m）、縦軸を外力 $F_{\text{ext}}$（N）とする力–変位グラフでは、自然長から終点までの仕事は三角形の面積に等しい。

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{1}{2}(0.050\,\text{m})(6.0\,\text{N}) \\ &= +0.15\,\text{J} \end{aligned}$$

**答え：**+0.15 J

**(3)** 終点の外力を全移動距離に掛けると、

$$(6.0\,\text{N})(0.050\,\text{m}) = 0.30\,\text{J}$$

となるが、これは外力が全区間で 6.0 N だったと仮定した計算である。

実際には外力は 0 N から 6.0 N へ直線的に増加する。したがって、全区間の平均の外力は 3.0 N である。

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= (3.0\,\text{N})(0.050\,\text{m}) \\ &= +0.15\,\text{J} \end{aligned}$$

**答え：外力は変位によって増加し、終点の力が全区間で一定ではないため。**

**(4)** ばねの力は移動方向と反対向きである。

$$W_{\text{s}} = -W_{\text{ext}} = -0.15\,\text{J}$$

**答え：**−0.15 J

## 3

**(1)** 初めの変位は +0.040 m なので、

$$\begin{aligned} U_{\text{A}} &= \frac{1}{2}\left(150\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0.040\,\text{m})^2 \\ &= 0.12\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

終わりの変位は +0.120 m なので、

$$\begin{aligned} U_{\text{B}} &= \frac{1}{2}\left(150\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0.120\,\text{m})^2 \\ &= 1.08\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：初め** $0.12\,\mathrm{J}$**、終わり** $1.08\,\mathrm{J}$

**(2)** 弾性エネルギーの変化量は、

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}} \\ &= 1.08\,\mathrm{J} - 0.12\,\mathrm{J} \\ &= +0.96\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

ばねがした仕事は、

$$W_{\mathrm{s}} = -\Delta U = -0.96\,\mathrm{J}$$

となる。

**答え：**$\Delta U = +0.96\,\mathrm{J}$**、**$W_{\mathrm{s}} = -0.96\,\mathrm{J}$

**(3)** 準静的な外力は $F_{\mathrm{ext}} = kx$ である。

初めの外力は、

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{A}} &= \left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.040\,\mathrm{m}) \\ &= 6.0\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

終わりの外力は、

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{B}} &= \left(150\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.120\,\mathrm{m}) \\ &= 18\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

となる。

したがって、力–変位グラフの台形の面積から、

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{ext}} &= \frac{6.0\,\mathrm{N} + 18\,\mathrm{N}}{2}(0.120\,\mathrm{m} - 0.040\,\mathrm{m}) \\ &= (12\,\mathrm{N})(0.080\,\mathrm{m}) \\ &= +0.96\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

(2)の弾性エネルギーの増加量 $+0.96\,\mathrm{J}$ と一致する。準静的な外力の仕事とばねの仕事は正負が反対である。

**答え：外力の仕事は** $+0.96\,\mathrm{J}$**。弾性エネルギーの増加量と等しく、ばねの仕事とは符号が反対になる。**

## 4

**(1)** 自然長から圧縮しているので、符号付き変位は負である。

$$x = -0.040\,\mathrm{m}$$

ばねの力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}} &= -\left(250\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.040\,\mathrm{m}) \\ &= +10\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

**答え：変位 $-0.040\,\mathrm{m}$、ばねの力 $+10\,\mathrm{N}$**

**(2)** 弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2}\left(250\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.040\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

変位が負でも、二乗するためエネルギーは正になる。

**答え：$0.20\,\mathrm{J}$**

**(3)** 自然長に戻ったとき、弾性エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ となる。

したがって、ばねがした仕事は、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s}} &= U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \\ &= 0.20\,\mathrm{J} - 0\,\mathrm{J} \\ &= +0.20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

圧縮状態から自然長へ向かうとき、ばねの力は正方向であり、物体も正方向へ移動する。そのため、ばねの仕事は正となる。

**答え：$+0.20\,\mathrm{J}$**

**(4)** 準静的に戻す場合、外力は $F_{\mathrm{ext}} = kx$ である。

圧縮状態では $x < 0$ なので外力は負方向だが、物体は自然長へ向かって正方向へ動く。したがって、外力は負の仕事をする。

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ext}} &= \Delta U \\ &= 0\,\mathrm{J} - 0.20\,\mathrm{J} \\ &= -0.20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

**答え：$-0.20\,\mathrm{J}$**

## 5

**(1)** 初めの変位は $-0.080\,\mathrm{m}$ である。

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.080\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.32\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

終わりの変位は $+0.120\,\mathrm{m}$ である。

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(+0.120\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.72\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

**答え：初め** $0.32\,\mathrm{J}$**、終わり** $0.72\,\mathrm{J}$

**(2)** 圧縮状態から自然長まで戻ると、弾性エネルギーは $0.32\,\mathrm{J}$ から $0\,\mathrm{J}$ へ減少する。

したがって、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s1}} &= 0.32\,\mathrm{J} - 0\,\mathrm{J} \\ &= +0.32\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$+0.32\,\mathrm{J}$

**(3)** 自然長から正方向に伸ばすと、弾性エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ から $0.72\,\mathrm{J}$ へ増加する。

したがって、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s2}} &= 0\,\mathrm{J} - 0.72\,\mathrm{J} \\ &= -0.72\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$-0.72\,\mathrm{J}$

**(4)** 全区間のばねの仕事は、各区間の仕事の和である。

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s}} &= W_{\mathrm{s1}} + W_{\mathrm{s2}} \\ &= +0.32\,\mathrm{J} - 0.72\,\mathrm{J} \\ &= -0.40\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

初めと終わりの弾性エネルギーから直接求めても、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s}} &= U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \\ &= 0.32\,\mathrm{J} - 0.72\,\mathrm{J} \\ &= -0.40\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

一方、初めから終わりまでの変位の差は、

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} &= +0.120\,\mathrm{m} - (-0.080\,\mathrm{m}) \\ &= +0.200\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

これを誤った式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 &= \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.200\,\mathrm{m})^2 \\ &= 2.0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となり、実際の弾性エネルギーの変化量 $+0.40\,\mathrm{J}$ とは一致しない。

弾性エネルギーは、自然長からの変位を二乗した量で決まる。したがって、初めと終わりのエネルギーをそれぞれ計算して差を取らなければならない。

**答え：ばねの仕事は** $-0.40\,\mathrm{J}$**。変位の差を二乗するのではなく、初めと終わりの変位の二乗の差を用いる。**

## 6

**(1)** 自然長からの伸びは、

$$\begin{aligned} x &= 0.24\,\mathrm{m} - 0.20\,\mathrm{m} \\ &= +0.040\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$+0.040\,\mathrm{m}$

**(2)** 準静的な伸長なので、外力の大きさは $k\,|\,x\,|$ である。

したがって、

$$\begin{aligned} k &= \frac{8.0\,\mathrm{N}}{0.040\,\mathrm{m}} \\ &= 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

**(3)** 弾性エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.040\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.16\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$0.16\,\mathrm{J}$

**(4)** 式 $U=\frac{1}{2}kx^2$ の $x$ は、ばね全体の長さではなく、自然長からの伸び縮みである。

この問題のばね全体の長さは $0.24\,\mathrm{m}$ だが、自然長からの伸びは $0.040\,\mathrm{m}$ である。

ばねが自然長のときに弾性エネルギーが $0\,\mathrm{J}$ となることからも、代入すべき量が自然長からの変位であると確認できる。

**答え：**$x$ **はばね全体の長さではなく、自然長からの変位を表すため。**

## 7

**(1)** 同じばねなので、ばね定数 $k$ は一定である。

ばねの力の大きさは $k\,|\,x\,|$ なので、$|\,x\,|$ を 2 倍にすると力の大きさも 2 倍になる。

一方、弾性エネルギーは $U=\frac{1}{2}kx^2$ なので、変位の大きさを 2 倍にすると、

$$U_{\mathrm{new}} = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

となる。

**答え：力の大きさは 2 倍、弾性エネルギーは 4 倍。**

**(2)** 今度は変位 $x$ を一定に保ち、ばね定数だけを 2 倍にする。

力の大きさも弾性エネルギーも、$k$ に比例する。

**答え：力の大きさは 2 倍、弾性エネルギーも 2 倍。**

**(3)** 弾性エネルギーの式から、変位の二乗を求める。

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

両辺を整理すると、

$$x^2 = \frac{2U}{k}$$

となる。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2(0.36\,\mathrm{J})}{200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} \\ &= 0.0036\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

したがって、

$$|\,x\,| = 0.060\,\mathrm{m}$$

である。

**答え：$x = +0.060\,\mathrm{m}$ または $x = -0.060\,\mathrm{m}$**

**(4)** 弾性エネルギーの式では変位を二乗しているため、正負の符号はエネルギーの値に現れない。

同じ大きさだけ伸ばした場合と縮めた場合は、同じ弾性エネルギーになる。

**答え：$U$ は $x^2$ で決まり、$x$ と $-x$ のどちらでも同じ値になるため。**

## 8

**(1)** 初めのばねは圧縮されているので、変位は $-0.050\,\mathrm{m}$ である。

したがって、

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2}\left(200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(-0.050\,\mathrm{m})^2 \\ &= 0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$0.25\,\mathrm{J}$

**(2)** 自然長に対応する位置では弾性エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ である。

したがって、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{s}} &= U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \\ &= 0.25\,\mathrm{J} - 0\,\mathrm{J} \\ &= +0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

**答え：**$+0.25\,\mathrm{J}$

**(3)** 物体 A は初め静止しているので、初めの運動エネルギーは $0\,\mathrm{J}$ である。

摩擦がなく、ばねの力だけが仕事をするので、ばねがした仕事が物体 A の運動エネルギーの増加量に等しい。

$$K_{\mathrm{B}} = 0\,\mathrm{J} + 0.25\,\mathrm{J}$$
$$= 0.25\,\mathrm{J}$$

終わりの速さを $v$ とすると、運動エネルギーは $K_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}mv^2$ である。

$$\frac{1}{2}(0.50\,\mathrm{kg})v^2 = 0.25\,\mathrm{J}$$

整理すると、

$$v^2 = \frac{2(0.25\,\mathrm{J})}{0.50\,\mathrm{kg}}$$
$$= 1.0\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

速さは負にならないので、

$$v = 1.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

**答え：**$1.0\,\mathrm{m/s}$

**(4)** ばねの力が $0\,\mathrm{N}$ になることは、その瞬間にばねによる加速度が生じないことを意味するが、すでに持っている速度が $0\,\mathrm{m/s}$ になることは意味しない。

この問題では、自然長に達するまでにばねが正の仕事をしたため、物体 A は運動エネルギーを得ている。

したがって、自然長を通過する瞬間はばねの力が $0\,\mathrm{N}$ であっても、物体 A は速さ $1.0\,\mathrm{m/s}$ で運動している。

**答え：力がゼロになることと速度がゼロになることは別であり、自然長に達するまでに得た運動エネルギーが残っているため。**

## 9

**(1)** 初めは自然長なので、変位は 0 m であり、弾性エネルギーは 0 J である。

終わりの変位は +0.10 m なので、

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.10\,\mathrm{m})^2$$
$$= 0.50\,\mathrm{J}$$

となる。

したがって、弾性エネルギーの変化量は、

$$\Delta U = 0.50\,\mathrm{J} - 0\,\mathrm{J}$$
$$= +0.50\,\mathrm{J}$$

となる。

**答え：初め** 0 J、**終わり** 0.50 J、**変化量** +0.50 J

**(2)** ばねがする仕事は、弾性エネルギーの変化量と符号が反対である。

$$W_{\mathrm{s}} = -\Delta U$$
$$= -0.50\,\mathrm{J}$$

**答え：**−0.50 J

**(3)** この問題では、外力とばねの力以外に仕事をする力がない。

したがって、仕事と運動エネルギーの関係から、

$$W_{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{s}} = \Delta K$$

となる。

数値を代入すると、

$$\Delta K = +0.80\,\mathrm{J} - 0.50\,\mathrm{J}$$
$$= +0.30\,\mathrm{J}$$

となる。

初めは静止していたので、終わりの運動エネルギーも 0.30 J である。

**答え：運動エネルギーの変化量は** $+0.30\,\mathrm{J}$

**(4)** 外力の仕事 $+0.80\,\mathrm{J}$ に対して、弾性エネルギーの増加量は $+0.50\,\mathrm{J}$ である。

その差である $+0.30\,\mathrm{J}$ は、物体の運動エネルギーの増加に対応している。

この問題のように、運動エネルギーが増加する場合には、外力の仕事を弾性エネルギーの変化量だけで表すことはできない。

外力とばねの力以外に仕事をする力がなければ、

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta U + \Delta K$$

となる。

したがって、この問題では、

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ext}} &= +0.50\,\mathrm{J} + 0.30\,\mathrm{J} \\ &= +0.80\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

と確かめられる。

**答え：外力の仕事の一部が弾性エネルギーの増加に、残りが運動エネルギーの増加に対応しているため。**