第 040 講 加速する座標系と慣性力

この講でできるようになること

- 地面の慣性系と、軸が回転せず並進加速する観測者の系を区別できる。
- 観測系の加速度から慣性力の大きさと向きを判断し、適切な運動方程式を立てられる。
- エレベーターや加速する車内の現象を、異なる座標系から説明できる。
- 相対加速度がゼロになる条件と、ゼロでない場合の運動を区別できる。

1. 同じ物体なのに、見える運動が違う

走り出した電車の中で立っていると、体が進行方向と反対側へ傾くことがある。電車の中から見ると、後ろ向きに引っ張られたように感じられる。

しかし、地面から観察すると、体には別の見え方がある。

電車が右向きに加速し始めたとき、乗客の体は慣性によって、それまでの速度を保とうとする。乗客の体が電車と同じように加速しなければ、車内からは後ろへ移動するように見えるのである。

ここで重要なのは、**物体そのものは同じでも、どの観測者から見た運動かによって、加速度の表し方が変わる**という点である。

本講では、次の二つの座標系を使う。

- **地面の慣性系** S：地面を近似的に静止した慣性系とみなし、物体に働く実在の力だけで運動を説明する。
- **加速する座標系** S'：地面に対して加速度をもって並進する観測者の系である。ここでは座標軸の向きは回転しない。

以下では、横方向の運動では右向き、鉛直方向の運動では上向きを正とする。重力加速度の大きさは、特に断らない限り $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

2. 地面の運動方程式と加速系の運動方程式

地面から見た運動

質量 m の物体に働く実在の力の合計を F_{real}、地面から見た加速度を a とする。

地面の慣性系 S では、運動方程式は

$$F_{\mathrm{real}} = ma$$

となる。

実在の力とは、重力、張力、垂直抗力、摩擦力など、他の物体との相互作用によって生じる力である。

加速する観測者から見た運動

次に、地面に対して加速度 A で動く座標系 S' から同じ物体を観察する。

物体の地面に対する加速度を a、観測系 S' に対する相対加速度を a' とすると、軸が回転しない並進運動では

$$a' = a - A$$

となる。

これは、物体と観測者の加速度の差が、観測者から見た物体の加速度になることを表す。

地面系の運動方程式 $F_{\text{real}} = ma$ に $a = a' + A$ を代入すると、

$$\begin{aligned} F_{\text{real}} &= m(a' + A) \\ &= ma' + mA \end{aligned}$$

である。したがって、

$$F_{\text{real}} - mA = ma'$$

となる。

ここで、$-mA$ を一つの力のように扱えば、加速する座標系でも運動方程式を書ける。

慣性力

地面に対して加速度 A で並進する、軸が回転しない座標系で導入する見かけの力を**慣性力**という。

$$F_{\text{in}} = -mA$$

慣性力の大きさは $m \mid A \mid$ であり、向きは観測系の加速度 A と反対向きである。

加速系 S' の運動方程式は

$$F_{\text{real}} + F_{\text{in}} = ma'$$

と書ける。

同じ物体を説明する二つの式を比較する。

観測系	運動方程式	右辺の加速度
地面の慣性系 S	$F_{\text{real}} = ma$	地面から見た a
並進加速系 S'	$F_{\text{real}} - mA = ma'$	加速系から見た a'

これらは異なる運動法則ではなく、同じ運動を別の観測系で表した式である。

慣性力を入れるときの判断

最初に「どの座標系から運動を見るか」を決める。

- 地面の慣性系 S なら、実在の力だけを合計して ma とする。
- 加速系 S' なら、実在の力に $-mA$ を加えて ma' とする。

慣性力は、観測系の**速度ではなく加速度**によって決まる。観測系が右へ加速すれば左向き、上へ加速すれば下向きとなる。

加速系の式に慣性力を加えたうえで、右辺を地面加速度の ma としてはいけない。

慣性力は作用反作用の力ではない

重力は地球が物体を引く力であり、張力は糸が物体を引く力である。

一方、慣性力は、加速する観測系で運動を表すために導入した見かけの力である。他の物体が新たに物体を押したり引いたりしたわけではない。

そのため、慣性力について、通常の実在力のように「どの物体が及ぼした力か」「その反作用はどの物体に働くか」を探さない。

また、地面に対して一定の速度で移動する座標系は、この範囲では慣性系である。単に動いているという理由だけで慣性力を加えることはない。

3. 加速系で物体が静止するとき

物体が加速する観測系 S' に対して静止している場合、その相対加速度は $a' = 0$ である。

このとき、加速系での運動方程式は

$$F_{\text{real}} + F_{\text{in}} = 0$$

となる。

したがって、**加速系に対して物体が静止する場合には、実在力と慣性力がつり合う形で考えられる。**

ただし、加速する座標系では、どの物体も必ずつり合うわけではない。相対加速度が $a' \neq 0$ なら、右辺の ma' を残さなければならない。

さらに、$a' = 0$ でも、物体が観測系に対して静止しているとは限らない。観測系に対して一定の速度で直線運動している場合も、相対加速度はゼロである。

この区別を、エレベーターと車の運動で確認する。

4. エレベーターで変わる見かけの重さ

エレベーターの床に立っている人を考える。

人の質量を m、床が人を上向きに押す垂直抗力を N とする。人には、下向きの重力 mg と上向きの垂直抗力 N が働く。

人が床から離れず、床と同じ加速度 A で運動している場合を考える。上向きを正とする。

地面の慣性系 S では、

$$N - mg = mA$$

となる。

一方、エレベーターと共に加速する床系 S' では、人が床に対して静止しているので $a' = 0$ である。慣性力は $-mA$ だから、

$$N - mg - mA = 0$$

となり、地面系と同じ式が得られる。

よって、

$$N = m(g + A)$$

である。

人が床（体重計）から受ける力に対応する表示を考えると、見かけの重さは N によって変わる。質量 m も実際の重力 mg も、エレベーターの加速だけでは変化しない。

例題 1

質量 $50\,\mathrm{kg}$ の人がエレベーターの床に立っている。エレベーターは上向きに $2\,\mathrm{m/s^2}$ で加速し、人は床と共に運動している。

上向きを正、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 人に働く重力と床からの垂直抗力を求めよ。

(2) 地面の慣性系 S で、人の運動方程式を確認せよ。

(3) エレベーターの床系 S' で、人に働く慣性力と運動方程式を求めよ。

解答・解説

(1) 人の重力の大きさは

$$mg = (50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 500\,\mathrm{N}$$

であり、下向きである。

人は床と同じ上向き加速度をもつので、

$$\begin{aligned} N - mg &= mA \\ N &= mg + mA \\ &= 500\,\mathrm{N} + (50\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 600\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

したがって、垂直抗力は上向きに $600\,\mathrm{N}$ である。

(2) 地面の慣性系では実在力だけを考える。

$$\begin{aligned} N - mg &= 600\,\mathrm{N} - 500\,\mathrm{N} \\ &= +100\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

一方、

$$ma = (50\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s^2}) = +100\,\mathrm{N}$$

であるから、$N - mg = ma$ が成立する。

(3) 床系は上向きに加速しているので、人に導入する慣性力は下向きとなる。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(50\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= -100\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

人は床系で静止しているため、$a' = 0$ である。

$$\begin{aligned} N - mg + F_{\mathrm{in}} &= 600\,\mathrm{N} - 500\,\mathrm{N} - 100\,\mathrm{N} \\ &= 0\,\mathrm{N} = ma' \end{aligned}$$

地面系でも床系でも、同じ垂直抗力が得られる。

上昇中か下降中かでは決まらない

垂直抗力の大小を決めるのは、速度の向きではなく**加速度の向き**である。

エレベーターの加速度	共動する人への垂直抗力
上向き $A>0$	$N>mg$
ゼロ $A=0$	$N=mg$
下向き $-g<A<0$	$0<N<mg$
下向き $A=-g$	$N=0$

例えば、下降しているエレベーターが減速するとき、加速度は上向きになる。このとき人は通常より大きな垂直抗力を受ける。

反対に、上昇していても減速中なら加速度は下向きであり、垂直抗力は小さくなり得る。

床が人を引っ張ることはできない

床からの垂直抗力は、接触している人を押す力である。通常の床は人を下向きに引っ張れないため、

$$N \geq 0$$

という条件がある。

床が自由落下して $A=-g$ となり、人も同じ加速度で落下するときは $N=0$ である。

床の下向き加速度の大きさが g を超え、共動を仮定した計算で $N<0$ が出た場合、その仮定は成立しない。人が床から離れれば、床からの垂直抗力はゼロとなる。

5. 水平加速する車内の吊り物体

右向きに加速する車内で、天井の支持点 C から軽い糸で小球をつるす。

車が一定の右向き加速度で動き、十分に時間が経過して小球の振動が収まり、車に対して静止している状態を考える。糸と支持点は車と共に動き、小球には張力と重力だけが実在力として働く。

このとき、小球は鉛直線より左側に位置し、糸は鉛直から左へ傾く。

地面から見る

地面の慣性系 S では、小球は車と同じ右向き加速度 A をもつ。

糸が小球を引く張力を F_t、糸と鉛直線とのなす傾きの大きさを θ とする。

張力の右向き成分は $F_t\sin\theta$、上向き成分は $F_t\cos\theta$ である。

右向きを水平方向の正、上向きを鉛直方向の正とすると、

$$F_t\sin\theta = mA$$

$$F_t\cos\theta - mg = 0$$

となる。

上の二式から、

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

が得られる。

ここでは $A>0$ とし、θ は左への傾きの大きさを表す。

車内から見る

車と共に加速する系 S' では、定常状態の小球は静止している。

そこで実在の張力と重力に、左向きの慣性力 mA を加える。

水平方向と鉛直方向のつり合いから、

$$F_t \sin\theta - mA = 0$$

$$F_t \cos\theta - mg = 0$$

を得る。

これらは地面系で立てた式と同じ張力・同じ傾きを与える。

例題 2

右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速している車内に、質量 $2\,\mathrm{kg}$ の小球が軽い糸でつるされている。

小球の振動は収まり、車に対して静止している。重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 地面の慣性系 S で、小球に働く実在力とその合力を求めよ。

(2) 車系 S' で導入する慣性力を求め、運動方程式を確認せよ。

(3) 張力の大きさと、糸の鉛直からの傾きについて $\tan\theta$ を求めよ。

解答・解説

(1) 小球に働く実在力は、糸の張力 F_t と重力 mg の二つだけである。

重力は

$$mg = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

であり、下向きに働く。

小球の地面に対する加速度は右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ なので、

$$ma = (2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s^2}) = +6\,\mathrm{N}$$

である。

したがって、実在力の合力は右向き $6\,\mathrm{N}$ となる。

鉛直方向の加速度はゼロなので、張力の上向き成分は $20\,\mathrm{N}$、水平方向の成分は右向きに $6\,\mathrm{N}$ である。

次の図は、地面の慣性系から小球を見た力の図である。支点 C は車に固定され、力を調べる対象は小球 m である。力の矢印は $1\,\mathrm{N}$ を内部図上の 8 ピクセルに対応させている。小球の右向き加速度は図中の力矢印には含めない。

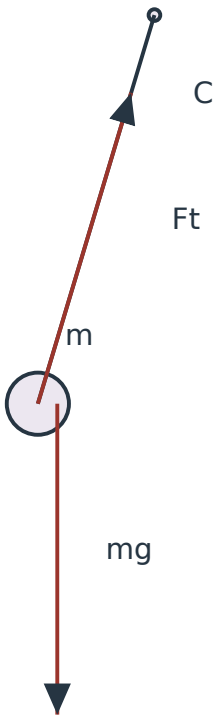

図 1　地面の慣性系。実在力 Ft と mg だけを描く。物体は右へ加速度 3m/s²。力 1N=8 内部 px。

(2) 車系は右向きに加速しているため、慣性力は左向きとなる。

$$\begin{aligned} F_{\text{in}} &= -mA \\ &= -(2\,\text{kg})(+3\,\text{m/s}^2) \\ &= -6\,\text{N} \end{aligned}$$

小球は車系で静止しているから、$a' = 0$ である。

水平方向では、

$$+6\,\text{N} - 6\,\text{N} = 0\,\text{N}$$

鉛直方向では、

$$+20\,\text{N} - 20\,\text{N} = 0\,\text{N}$$

となり、車系での運動方程式が成立する。

次の図は、同じ小球を車系から見たものである。張力と重力の大きさ・向き・表示尺度は前の図から変えず、車系でのみ左向きの見かけの慣性力を加えている。

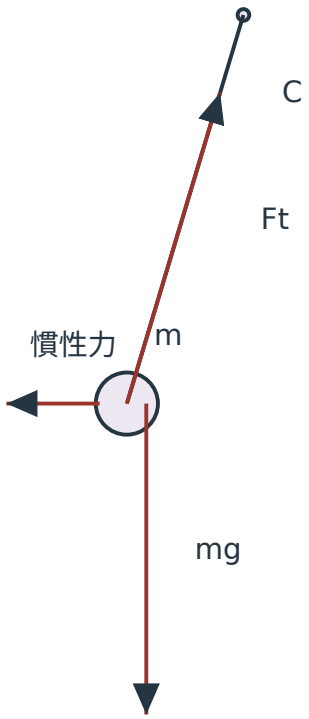

図 2　車と共に加速する系。見かけの慣性力 6N を左へ加える。物体は車に対し静止。力 1N=8 内部 px。

ここで描かれた左向きの慣性力は、実在する外力ではない。加速する車系で運動を記述するための見かけの力である。

(3) 張力の右向き成分は 6 N、上向き成分は 20 N なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} F_t &= \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2 + (20\,\mathrm{N})^2} \\ &= \sqrt{436}\,\mathrm{N} \\ &= 2\sqrt{109}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

張力の大きさは二つの成分を単純に足した 26 N ではない。

また、鉛直からの傾きについて、

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{6\,\mathrm{N}}{20\,\mathrm{N}} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

である。

右向きに加速する車内で小球が左へ傾く理由は、車と共に運動するために張力の右向き成分が必要だからである。加速開始直後に小球が必ずこの一定の角度を保つわけではなく、ここでは振動の収まった定常状態を扱っている。

6. 加速する車の床に置いた物体

車の床に置かれた物体は、床との摩擦によって車と共に加速できる場合がある。

右向きに加速する車の床に質量 m の物体があり、物体が床上で滑っていないとする。鉛直方向に加速度はなく、床は水平である。

物体に働く実在力は、重力 mg、床からの垂直抗力 N、水平方向の摩擦力 f である。

鉛直方向の運動方程式から

$$N = mg$$

となる。

車と物体が共動するとき、地面系での水平加速度は $a = A$ だから、

$$f = mA$$

である。

静止摩擦力の大きさは常に最大値ではない。必要な大きさだけ働き、その上限が最大静止摩擦力 $\mu_s N$ である。

したがって、物体が滑らず共動できる条件は、

$$|\,mA\,| \le \mu_s N$$

である。

ここで μ_s は静止摩擦係数を表す。

例題 3

右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速する車の水平な床に、質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体が置かれている。重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 静止摩擦係数が $\mu_s = 0.4$ のとき、物体は滑らずに車と共動できるか。また、実際に働く静止摩擦力を求めよ。

(2) 別の床条件として、静止摩擦係数を $\mu_s = 0.2$ とする。この条件で物体は共動できるか。

(3) (2) の床条件では、動摩擦係数を $\mu_k = 0.2$ とする。滑り始めた後、床が物体より速く右へ動いているとき、物体の地面加速度 a と車系の相対加速度 a' を求めよ。

解答・解説

(1) 鉛直方向の加速度はゼロなので、

$$N = mg = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。

車と共動するために必要な右向き摩擦力は、

$$f_{\mathrm{req}} = (2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s^2}) = 6\,\mathrm{N}$$

となる。

最大静止摩擦力は

$$f_{\mathrm{s,max}} = 0.4(20\,\mathrm{N}) = 8\,\mathrm{N}$$

である。

必要な $6\,\mathrm{N}$ は最大値 $8\,\mathrm{N}$ 以下なので共動可能である。実際の静止摩擦力は右向きに $6\,\mathrm{N}$ であり、$8\,\mathrm{N}$ ではない。

(2) 床条件を変更した場合の最大静止摩擦力は、

$$f_{\mathrm{s,max}} = 0.2(20\,\mathrm{N}) = 4\,\mathrm{N}$$

となる。

共動には $6\,\mathrm{N}$ が必要であるが、最大静止摩擦力は $4\,\mathrm{N}$ しかない。したがって、物体は車と共動できず、滑りが生じる。

(3) 物体は床に対して左向きに滑っているため、床が物体に及ぼす動摩擦力は右向きである。

$$f_{\mathrm{k}} = 0.2(20\,\mathrm{N}) = 4\,\mathrm{N}$$

地面の慣性系 S では、この摩擦力が水平方向の実在合力となる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= +2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

車系 S' から見た相対加速度は、

$$\begin{aligned} a' &= a - A \\ &= \left(+2\,\mathrm{m/s^2}\right) - \left(+3\,\mathrm{m/s^2}\right) \\ &= -1\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

したがって、物体の地面加速度は右向き $2\,\mathrm{m/s^2}$、車系から見た相対加速度は左向き $1\,\mathrm{m/s^2}$ である。

車系で確認すると、慣性力は左向きに 6 N である。

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{k}} + F_{\mathrm{in}} &= 4\,\mathrm{N} - 6\,\mathrm{N} \\ &= -2\,\mathrm{N} \\ &= (2\,\mathrm{kg})\left(-1\,\mathrm{m/s^2}\right) \\ &= ma' \end{aligned}$$

こちらも同じ相対加速度を与える。

摩擦力は床との実在する相互作用である。一方、車系で加える慣性力は見かけの力である。

地面系では実在の摩擦力だけを使い、車系ではその摩擦力に慣性力を加える。両者を地面系で二重に加えてはいけない。

7. 相対的に動く物体では、つり合いを決めつけない

加速する車の中では、車に対して静止している物体だけでなく、車内を移動する物体も観察できる。

例えば、車に対して摩擦のない水平面上を物体が動き、物体に水平方向の実在力が働かない場合を考える。

地面の慣性系では水平合力がゼロなので、

$$a = 0$$

である。

車が右向きに加速度 A で動いていれば、

$$a' = 0 - A = -A$$

となる。

車系からは、物体が車に対して左向きに加速しているように見える。

この場合、車系では左向きの慣性力が存在するが、それとつり合う水平の実在力はない。

したがって、

$$F_{\text{in}} = ma'$$

となり、右辺はゼロではない。

相対静止と相対加速度ゼロの違い

- 車に対して静止しているなら、$a' = 0$ である。
- 車に対して一定の速度で直線運動している場合も、$a' = 0$ である。
- 車に対して運動していても、そのことだけで $a' \neq 0$ とは限らない。
- 相対加速度がゼロでない場合、加速系の運動方程式には必ず ma' が残る。

慣性力を加えたからといって、物体が必ずつり合うわけではない。

演習問題

演習 1

質量 $50\,\text{kg}$ の人が、エレベーターの床と共に運動している。上向きを正、重力加速度の大きさを $10\,\text{m/s}^2$ とする。人に働く実在力は、重力と床からの垂直抗力である。

演習 1(1)

エレベーターが下向きに $2\,\text{m/s}^2$ で加速している。床からの垂直抗力 N を求め、地面系 S で運動方程式を確認せよ。

演習 1(2)

(1) の場合に床系 S' で導入する慣性力を、上向きを正とする符号付きの値で求めよ。また、床系での運動方程式を確認せよ。

演習 1(3)

エレベーターが上昇または下降しているが、速さは一定である。このときの垂直抗力を求めよ。また、下降中のエレベーターが上向きに $2\,\text{m/s}^2$ で加速している場合の垂直抗力と比較し、速度の向きだけで大小を判断できない理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」。

演習 2

質量 $50\,\mathrm{kg}$ の人がエレベーターの床に立っている。上向きを正とし、重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。床と人は初め互いに静止している。

演習 2(1)

床が自由落下し、加速度が $A=-10\,\mathrm{m/s^2}$ となるとき、人が床と同じ加速度で運動する限界状態を考える。垂直抗力 N と、床系 S' の慣性力を求めよ。

演習 2(2)

床の下向き加速度が $A=-12\,\mathrm{m/s^2}$ となったとする。人が床と共動すると仮定して垂直抗力を計算し、その結果が意味することを説明せよ。

演習 2(3)

(2) の状態で人が床から離れ、鉛直方向には重力だけが働くとする。人の地面加速度 a と床から見た相対加速度 a' を求め、床から見た人の動く向きを説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」。

演習 3

車が地面に対して右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速している。車内の支持点から質量 $2\,\mathrm{kg}$ の小球を軽い糸でつるしたところ、十分に時間が経過し、小球は車に対して静止した。重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

演習 3(1)

地面系 S で小球に働く実在力をすべて答えよ。また、張力の水平成分と鉛直成分を、向きとともに求めよ。

演習 3(2)

車系 S' で慣性力を加えて運動を表したとき、水平方向の合力がゼロとなる理由を説明せよ。

演習 3(3)

張力の大きさ F_t と、糸の鉛直からの傾きの大きさ θ について $\tan\theta$ を求めよ。また、加速開始直後から必ず同じ傾きになるといえるか説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」。

©ミライコーチング

演習 4

車が右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速している。水平な車の床に、質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体を置く。重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

演習 4(1)

床と物体の静止摩擦係数が 0.4 のとき、物体が車と滑らず共動できるか調べよ。また、実際の静止摩擦力の大きさを求めよ。

演習 4(2)

別の床条件として、静止摩擦係数を 0.2 とする。車と共動できるか判定し、その理由を説明せよ。

演習 4(3)

(2) の条件では動摩擦係数も 0.2 とする。物体が滑り始めた後、床が物体より速く右へ動いているとする。このときの地面加速度 a と車系の相対加速度 a' を求めよ。さらに、車系の運動方程式で確認せよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」。

演習 5

水平な直線上で、車が地面に対して一定の右向き加速度 $A = +2\,\mathrm{m/s^2}$ で動いている。

車とは接触せず、水平方向に実在の力が働かない物体を考える。時刻 $t = 0$ で、車と物体の地面に対する速度は等しく、両者の位置も一致していたとする。右向きを正とする。

演習 5(1)

物体の地面系 S における加速度 a と、車系 S' における相対加速度 a' を求めよ。

演習 5(2)

$t = 0$ から $3\,\mathrm{s}$ 後の、車から見た物体の相対速度を求めよ。

演習 5(3)

同じ $3\,\mathrm{s}$ 間での車から見た物体の相対変位を求め、その符号の意味を説明せよ。

演習 5(4)

別の状況として、ある物体が加速する車系 S' に対して左向きに一定の相対速度 $-4\,\mathrm{m/s}$ で直線運動しているとする。この場合の相対加速度 a' を求めよ。また、相対運動していることと相対加速度がゼロでないことは同じか説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」。

©ミライコーチング

演習 6

質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体に、地面系 S で水平方向右向きの実在合力 $10\,\mathrm{N}$ が働いている。

一方、観測者の座標系 S' は地面に対して右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速している。両座標系の軸は回転しない。右向きを正とする。

演習 6(1)

地面系 S での運動方程式から、物体の加速度 a を求めよ。

演習 6(2)

車系 S' で導入する慣性力と、物体の相対加速度 a' を求めよ。さらに、実在力と慣性力を使った運動方程式が成立することを確認せよ。

演習 6(3)

次の主張について、それぞれ正しいか誤りか判断し、理由を説明せよ。

ア．加速する座標系では慣性力を加えるので、物体の相対加速度は必ずゼロになる。

イ．慣性力は物体の速度と必ず反対向きに働く。

ウ．慣性力は加速する座標系で導入する見かけの力であり、それに対する実在の反作用の相手を設定しない。

エ．地面に対して一定の速度で移動する、軸が回転しない座標系では、並進加速に伴う慣性力を加える必要はない。

対応解説：巻末の「演習 6 の解答・解説」。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1)

上向きを正とするので、下向き加速度は

$$A = -2\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

人に働く重力は、

$$mg = (50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 500\,\mathrm{N}$$

である。

人は床と共動しているため、地面系では $a = A$ となる。

$$\begin{aligned} N - mg &= mA \\ N &= mg + mA \\ &= 500\,\mathrm{N} \\ &\quad +(50\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 400\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

したがって、垂直抗力は上向きに 400 N である。

地面系で実在力の合力を求めると、

$$\begin{aligned} N - mg &= 400\,\mathrm{N} - 500\,\mathrm{N} \\ &= -100\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

一方、

$$ma = (50\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s^2}) = -100\,\mathrm{N}$$

となるため、地面系の運動方程式が成立する。

演習 1(2)

床系は下向きに加速しているので、慣性力は上向きとなる。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(50\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= +100\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

したがって、慣性力は上向きに 100 N である。

人は床系に対して静止しているので、$a' = 0$ である。

$$\begin{aligned} N - mg + F_{\mathrm{in}} &= 400\,\mathrm{N} - 500\,\mathrm{N} + 100\,\mathrm{N} \\ &= 0\,\mathrm{N} = ma' \end{aligned}$$

床系では、実在の垂直抗力・重力と慣性力がつり合っている。

演習 1(3)

一定速度で上昇または下降している場合、加速度は

$$A = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

そのため、

$$N = mg = (50\,\mathrm{kg})\big(10\,\mathrm{m/s^2}\big) = 500\,\mathrm{N}$$

となる。

また、慣性力は $-mA = 0\,\mathrm{N}$ である。エレベーターが移動していても、加速度がゼロならこの慣性力は生じない。

一方、下降中でも加速度が上向きに $2\,\mathrm{m/s^2}$ であれば、

$$\begin{aligned} N &= mg + mA \\ &= 500\,\mathrm{N} \\ &\quad +(50\,\mathrm{kg})\big(+2\,\mathrm{m/s^2}\big) \\ &= 600\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

したがって、下降しているという速度の向きだけでは、垂直抗力の大小を判断できない。

垂直抗力は加速度の向きと大きさによって決まり、下降中に減速している場合は上向き加速度となって垂直抗力が大きくなる。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)

上向きを正とする。床の自由落下加速度は、

$$A = -10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

人が床と同じ加速度で動く限界状態では、地面系で

$$N - mg = mA$$

が成立する。

重力は、

$$mg = (50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 500\,\mathrm{N}$$

であるから、

$$\begin{aligned} N &= mg + mA \\ &= 500\,\mathrm{N} \\ &\quad +(50\,\mathrm{kg})(-10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

床系の慣性力は、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(50\,\mathrm{kg})(-10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= +500\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

であり、上向きである。

床系では、

$$\begin{aligned} N - mg + F_{\mathrm{in}} &= 0\,\mathrm{N} - 500\,\mathrm{N} + 500\,\mathrm{N} \\ &= 0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

垂直抗力がゼロとなっても、実在の重力 500 N が消えたわけではない。

演習 2(2)

床が下向きに $12\,\mathrm{m/s^2}$ で加速するとき、

$$A = -12\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

仮に人が床と共動するとすると、

$$\begin{aligned} N &= mg + mA \\ &= 500\,\mathrm{N} \\ &\quad +(50\,\mathrm{kg})(-12\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= -100\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

しかし、床からの垂直抗力には $N \geq 0$ という条件がある。床は人を下向きに引っ張れないため、$-100\,\mathrm{N}$ を実際の垂直抗力として答えることはできない。

負の垂直抗力が出たことは、床と人が同じ加速度で運動するという仮定が成立しないことを示す。

そのため、人は床から離れ、接触がなくなれば $N = 0\,\mathrm{N}$ となる。

演習 2(3)

人が床から離れた後、人に働く鉛直方向の実在力は重力だけである。

したがって、地面系の運動方程式は

$$-mg = ma$$

となる。

両辺を質量 m で割れば、

$$a = -g = -10\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

床の加速度は $A = -12\,\mathrm{m/s^2}$ なので、

$$\begin{aligned} a' &= a - A \\ &= \left(-10\,\mathrm{m/s^2}\right) - \left(-12\,\mathrm{m/s^2}\right) \\ &= +2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

したがって、人の地面加速度は下向き $10\,\mathrm{m/s^2}$、床に対する相対加速度は上向き $2\,\mathrm{m/s^2}$ である。

人も床も下向きに加速しているが、床のほうが大きい下向き加速度をもつ。そのため、床から見ると人は上向きに離れていく。初めの相対速度がゼロであるという条件とも一致する。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)

地面の慣性系 S で小球に働く実在力は、糸からの張力 F_t と地球からの重力 mg である。

重力は、

$$mg = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

であり、下向きに働く。

小球は車と共に右向きに加速しているため、地面に対する加速度は

$$a = +3\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

したがって、水平方向の実在合力は

$$ma = (2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s^2}) = +6\,\mathrm{N}$$

となる。

重力に水平成分はないため、張力の水平成分は右向き 6 N である。

鉛直方向の加速度はゼロなので、張力の上向き成分は重力と同じ 20 N となる。

よって、

- 張力の水平成分：右向き 6 N
- 張力の鉛直成分：上向き 20 N

である。

演習 3(2)

車系 S' は右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速しているため、小球に導入する慣性力は左向きとなる。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= -6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

定常状態では小球が車系に対して静止しているので、相対加速度は $a' = 0$ である。

張力の右向き成分は 6 N、慣性力は左向き 6 N だから、

$$+6\,\mathrm{N} - 6\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N}$$

となる。

したがって、車系では水平方向の合力がゼロである。

これは慣性力が常に他の力とつり合うからではない。**今回の小球が車に対して静止しており、相対加速度がゼロだから**である。

演習 3(3)

張力の成分は、右向き 6 N、上向き 20 N である。

したがって、張力の大きさは、

$$\begin{aligned} F_t &= \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2 + (20\,\mathrm{N})^2} \\ &= \sqrt{436}\,\mathrm{N} \\ &= 2\sqrt{109}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

糸の傾きの大きさを θ とすると、

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{6\,\mathrm{N}}{20\,\mathrm{N}} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

である。

糸は鉛直線より左へ傾き、小球は支持点より左側に位置する。

ただし、加速開始直後から必ずこの角度で静止するとはいえない。加速開始時の小球の運動によっては振動が生じる。

ここで求めた角度は、振動が収まり、車に対して小球が静止した定常状態の値である。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1)

鉛直方向の加速度はゼロなので、垂直抗力は

$$N = mg = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。

車と滑らず共動するためには、物体が右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速する必要がある。

このとき必要な静止摩擦力は、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{req}} &= mA \\ &= (2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

最大静止摩擦力は、

$$f_{\mathrm{s,max}} = 0.4(20\,\mathrm{N}) = 8\,\mathrm{N}$$

となる。

必要な力と上限を比較すると、

$$6\,\mathrm{N} \leq 8\,\mathrm{N}$$

であるから、物体は滑らず共動できる。

実際の静止摩擦力は右向きに $6\,\mathrm{N}$ である。

静止摩擦力は必要に応じて大きさが決まるので、最大値の $8\,\mathrm{N}$ が必ず働くわけではない。

演習 4(2)

静止摩擦係数を 0.2 に変更した場合、

$$f_{\mathrm{s,max}} = 0.2(20\,\mathrm{N}) = 4\,\mathrm{N}$$

である。

しかし、車との共動に必要な摩擦力は依然として

$$f_{\mathrm{req}} = 6\,\mathrm{N}$$

である。

$$6\,\mathrm{N} > 4\,\mathrm{N}$$

となるため、静止摩擦力だけでは車と同じ加速度を与えられない。

したがって、物体は車と滑らず共動できず、滑りが生じる。

演習 4(3)

床が物体より速く右へ動いているので、物体は床に対して左へ滑っている。床が物体に及ぼす動摩擦力は右向きとなる。

動摩擦力の大きさは、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{k}} &= \mu_k N \\ &= 0.2(20\,\mathrm{N}) \\ &= 4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

地面系では、右向きの摩擦力が水平の実在合力となる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{f_{\mathrm{k}}}{m} \\ &= \frac{4\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} \\ &= +2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

したがって、地面加速度は右向き $2\,\mathrm{m/s^2}$ である。

車系の相対加速度は、

$$\begin{aligned} a' &= a - A \\ &= \left(+2\,\mathrm{m/s^2}\right) - \left(+3\,\mathrm{m/s^2}\right) \\ &= -1\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となり、左向き $1\,\mathrm{m/s^2}$ である。

車系では慣性力を追加する。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(2\,\mathrm{kg})\left(+3\,\mathrm{m/s^2}\right) \\ &= -6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

よって、車系の運動方程式は、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{k}} + F_{\mathrm{in}} &= 4\,\mathrm{N} - 6\,\mathrm{N} \\ &= -2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

一方、

$$ma' = (2\,\mathrm{kg})\left(-1\,\mathrm{m/s^2}\right) = -2\,\mathrm{N}$$

であるため、

$$f_{\mathrm{k}} + F_{\mathrm{in}} = ma'$$

が成立する。

車から見れば、物体は左向きの相対加速度をもつ。したがって、滑っている場合に車系の力を無条件につり合わせることはできない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1)

物体には水平方向の実在力が働かないため、地面系での運動方程式は、

$$F_{\text{real}} = ma = 0$$

である。

したがって、

$$a = 0\,\text{m/s}^2$$

となる。

車は右向きに

$$A = +2\,\text{m/s}^2$$

で加速しているので、

$$\begin{aligned} a' &= a - A \\ &= (0\,\text{m/s}^2) - (+2\,\text{m/s}^2) \\ &= -2\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

となる。

地面系では物体の水平加速度はゼロであるが、車系からは左向きに $2\,\text{m/s}^2$ で加速して見える。

演習 5(2)

時刻 $t = 0$ で車と物体の速度は等しいため、初めの相対速度は

$$v'_0 = 0\,\text{m/s}$$

である。

相対加速度は一定で $a' = -2\,\text{m/s}^2$ だから、$3\,\text{s}$ 後の相対速度は、

$$\begin{aligned} v' &= v'_0 + a't \\ &= 0\,\text{m/s} \\ &\quad +(-2\,\text{m/s}^2)(3\,\text{s}) \\ &= -6\,\text{m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、車から見た物体の相対速度は左向きに $6\,\text{m/s}$ である。

演習 5(3)

初めの相対速度はゼロであり、相対加速度は一定なので、

$$\Delta x' = {v'}_0 t + \frac{1}{2} a' t^2$$

を使える。

$$\begin{aligned}\Delta x' &= (0\,\mathrm{m/s})(3\,\mathrm{s}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-2\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{s})^2 \\ &= -9\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

したがって、3 s 間の相対変位は $-9\,\mathrm{m}$ である。

負の符号は、物体が車に対して左向きに 9 m 変位したことを表す。

これは物体に左向きの実在力が働いたことを意味しない。地面系では物体が初めの速度を保ち続ける一方、車の速度が右向きに増加するため、相対的に左へ移動するのである。

演習 5(4)

車系に対する相対速度が一定で、

$$v' = -4\,\mathrm{m/s}$$

である。

相対速度が時間とともに変化しないため、

$$a' = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

この物体は車に対して左向きに動いているが、相対加速度はゼロである。

したがって、**相対運動していることと、相対加速度がゼロでないことは同じではない**。

相対速度がゼロでなくても、それが一定なら相対加速度はゼロとなる。逆に、車系で物体の相対速度が変化しているときには、相対加速度を考えなければならない。

この状況では車系で実在力と慣性力の合計がゼロになるが、それは相対加速度がゼロだからであり、相対静止しているからではない。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1)

地面の慣性系 S では、実在力の合計だけで運動方程式を立てる。

右向きの実在合力は

$$F_{\text{real}} = +10\,\text{N}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{\text{real}}}{m} \\ &= \frac{+10\,\text{N}}{2\,\text{kg}} \\ &= +5\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

となる。

物体の地面に対する加速度は、右向きに $5\,\text{m/s}^2$ である。

演習 6(2)

観測系 S' は右向きに $3\,\mathrm{m/s^2}$ で加速しているため、慣性力は左向きとなる。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{in}} &= -mA \\ &= -(2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= -6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

したがって、慣性力は左向き $6\,\mathrm{N}$ である。

相対加速度は、

$$\begin{aligned} a' &= a - A \\ &= (+5\,\mathrm{m/s^2}) - (+3\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= +2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

車系から見ても、物体は右向きに $2\,\mathrm{m/s^2}$ で加速している。

車系で実在力と慣性力を合計すると、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{real}} + F_{\mathrm{in}} &= 10\,\mathrm{N} - 6\,\mathrm{N} \\ &= +4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

一方、

$$ma' = (2\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s^2}) = +4\,\mathrm{N}$$

であるから、

$$F_{\mathrm{real}} + F_{\mathrm{in}} = ma'$$

が成立する。

ここでは車系での合力がゼロではなく、右向き $4\,\mathrm{N}$ である。加速する座標系でも、物体に相対加速度が生じることが確認できる。

演習 6(3)

ア：誤り。

慣性力を導入しても、相対加速度が必ずゼロになるわけではない。

加速系の運動方程式は、

$$F_{\mathrm{real}} + F_{\mathrm{in}} = ma'$$

である。

今回の条件では、

$$ma' = +4\,\mathrm{N}$$

となるため、相対加速度は右向きに $2\,\mathrm{m/s^2}$ である。

慣性力を加えた後の合力がゼロとなるのは、$a' = 0$ の場合だけである。

イ：誤り。

慣性力の向きは、物体の速度ではなく、観測系の加速度によって決まる。

$$F_{\text{in}} = -mA$$

であるから、観測系が右向きに加速すれば慣性力は左向き、左向きに加速すれば右向きとなる。

物体の速度がどちらを向いているかを調べなくても、慣性力の向きを決められる。

ウ：正しい。

慣性力は、加速する観測系で運動方程式を書くために導入する見かけの力である。

重力や摩擦力のように、別の物体との相互作用として新たに生じる力ではない。

したがって、慣性力に対して実在する反作用の相手を設定しない。

エ：正しい。

地面に対して一定速度で移動し、座標軸が回転しない座標系では、

$$A = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

したがって、

$$F_{\text{in}} = -mA = 0\,\mathrm{N}$$

となる。

この座標系では、地面の慣性系と同様に実在力だけで運動方程式を書ける。

物体や観測者が移動していること自体は、慣性力を導入する理由にはならない。判断に必要なのは、観測系が加速しているかどうかである。