

第 93 講 2 直線の平行・垂直

学習目標

- 2 直線の傾きを比べ、平行か垂直かを判定できる。
- 縦向きの直線では傾きが定まらず、横向きの直線では傾きが 0 であることを理解し、正しく判定できる。
- 1 点と平行・垂直の条件から直線の方程式を求め、点・傾き・図を使って検算できる。

1. 2 直線の関係は傾きに表れる

傾きは直線の向きを表す

直線 $y = mx + n$ では、 m が傾きである。傾きは、 x が 1 増えたときに y がどれだけ増減するかを表している。

例えば、 $y = 2x + 1$ と $y = 2x - 3$ は切片が異なるが、どちらも傾きは 2 である。同じ割合で右上がりになるため、2 直線は交わらず平行になる。

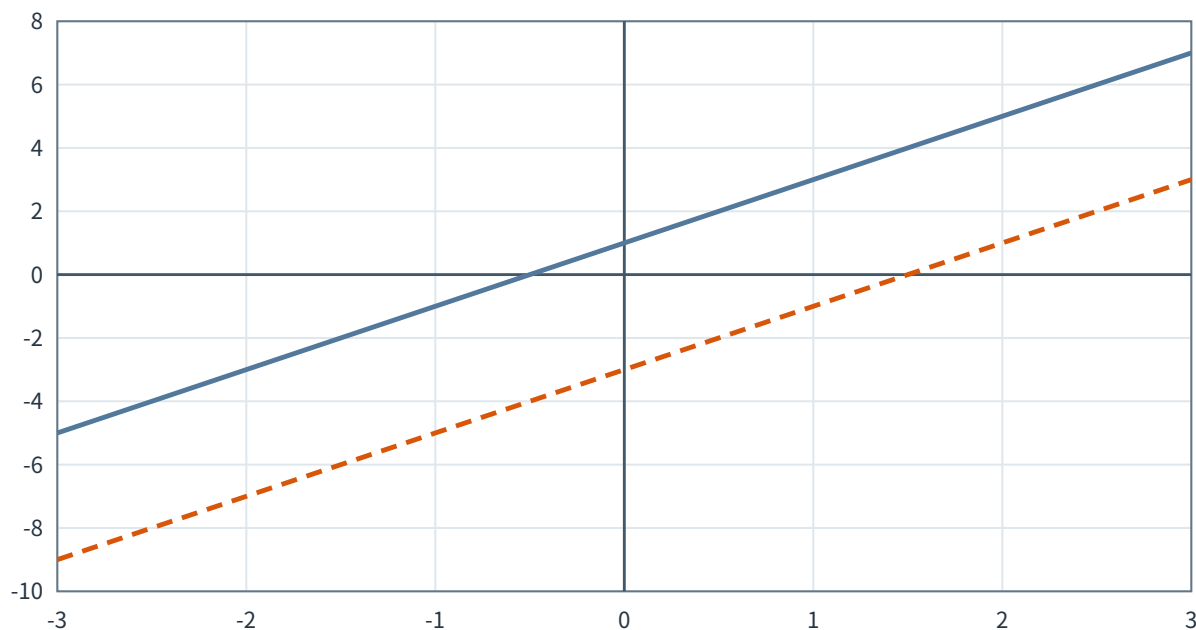


図 1 傾きがともに 2 である平行な 2 直線

したがって、縦向きでない異なる 2 直線では、傾きが等しいことが平行を判定する基本になる。

平行の条件

2 直線

$$y = m_1x + n_1, \quad y = m_2x + n_2$$

が異なる直線であるとする。このとき、

$$m_1 = m_2$$

ならば 2 直線は平行である。

傾きだけでなく切片まで等しい場合は、2 本の異なる直線ではなく同じ直線が一致している。

2. 垂直な 2 直線の傾き

垂直では傾きの符号と大きさが変わる

縦向きでも横向きでもない 2 直線では、垂直になるときの傾きには一定の関係がある。
例えば、傾きが 2 の直線と傾きが $-\frac{1}{2}$ の直線を比べる。

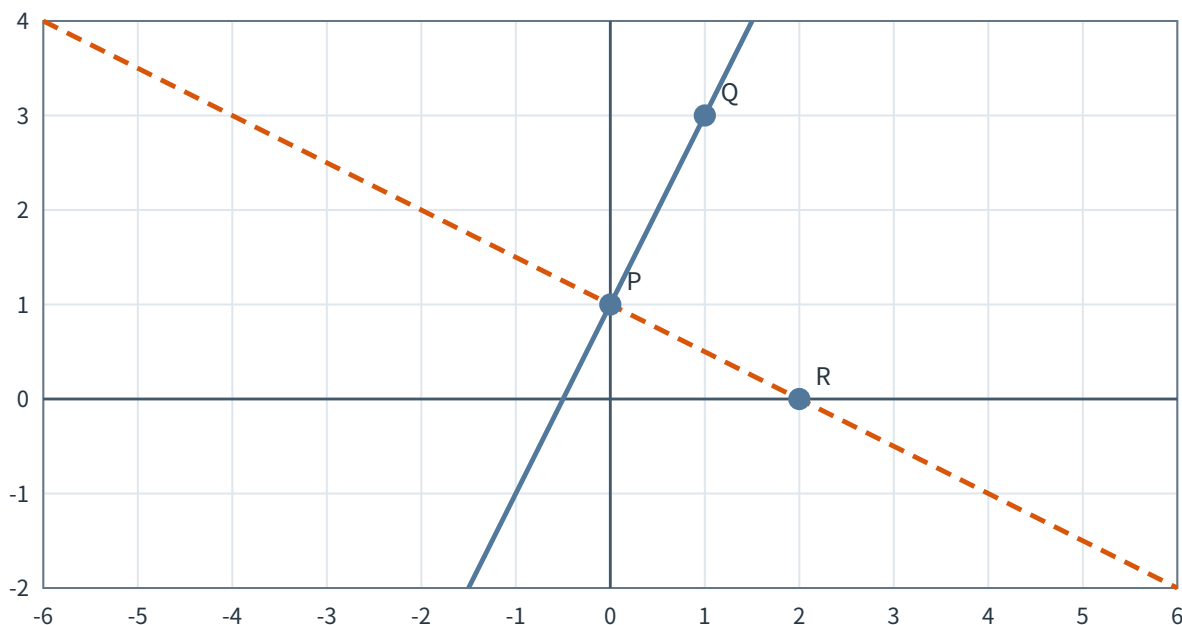


図 2 同じ目盛り幅で見た垂直な 2 直線。P から Q へ 右 1・上 2、P から R へ 右 2・下 1

横 1 目盛りと縦 1 目盛りを同じ長さでかく。2 直線は $P(0, 1)$ で直角に交わる。P から $Q(1, 3)$ へは右に 1・上に 2、P から $R(2, 0)$ へは右に 2・下に 1 進む。図で向きをつかみ、傾きの積で垂直を確認する。

2 つの傾きを掛けると、

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

となる。

この「積が -1 」という関係を使えば、グラフを正確にかかなくても垂直を判定できる。

垂直の条件

縦向きでも横向きでもない 2 直線の傾きを m_1, m_2 とすると、

$$m_1 m_2 = -1$$

ならば 2 直線は垂直である。

言い換えると、傾き m の直線に垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{m}$ である。ただし、 $m = 0$ の場合はこの式を使わず、縦向き・横向きの例外として考える。

3. 縦向き・横向きの直線は別に考える

傾きが求められない直線に注意

直線 $x = a$ は縦向きの直線である。この直線では、 x の変化量が 0 になるため、通常の意味で傾きを定めることができない。

一方、直線 $y = b$ は横向きの直線であり、傾きは 0 である。

したがって、縦向きの直線が含まれるときは $m_1 = m_2$ や $m_1 m_2 = -1$ を機械的に使ってはいけない。

縦向き・横向きの判定

次の関係を直接使う。

- $x = a$ と $x = b$ は、 $a \neq b$ なら平行である。
- $y = c$ と $y = d$ は、 $c \neq d$ なら平行である。
- $x = a$ と $y = c$ は垂直である。
- $x = a$ と $x = a$ のように式が同じなら、2 直線は一致している。

4. 方程式から傾きを読み取る

まず $y = mx + n$ の形を見る

直線が $y = mx + n$ の形で書かれていれば、 x の係数 m がそのまま傾きである。

一方、直線が $Ax + By + C = 0$ の形で与えられたとする。ただし、 A と B は同時に 0 ではない。 $B \neq 0$ なら y について解くと、

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

となる。したがって、傾きは $-\frac{A}{B}$ である。

ただし、 $B = 0$ の場合は $x = a$ (a は定数) の形になるため、縦向きの直線として別に扱う。

例題 1：傾きから平行・垂直を判定する

次の 3 直線を考える。

$$L : y = 2x + 1, \quad m : y = 2x - 3, \quad n : y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(1) L と m の関係を答えよ。

(2) L と n の関係を答えよ。

例題 1 の解答・解説

(1) L の傾きは 2、 m の傾きも 2 である。2 直線は切片が異なるので同じ直線ではない。
したがって、 L と m は平行である。

(2) L の傾きは 2、 n の傾きは $-\frac{1}{2}$ である。積を調べると、

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

となる。

したがって、 L と n は垂直である。

平行では「傾きが等しいか」、垂直では「傾きの積が -1 か」を見るのが基本である。

例題 2：縦向き・横向きの直線

次の 2 直線の関係をそれぞれ答えよ。

(1) $x = 3$ と $x = -1$

(2) $x = 3$ と $y = -2$

例題 2 の解答・解説

(1) $x = 3$ と $x = -1$ は、どちらも縦向きの異なる直線である。したがって平行である。

(2) $x = 3$ は縦向き、 $y = -2$ は横向きの直線である。縦向きと横向きの直線は直角に交わるため、垂直である。

この場合は縦向きの直線の傾きが定まらないので、傾きの積を計算してはいけない。

5. 点を通る平行な直線を求める

平行なら傾きをそのまま使う

点 (a, b) を通り、傾きが m である直線は、

$$y - b = m(x - a)$$

と表せる。

平行な直線を求める問題では、基準となる直線の傾きを読み取り、その傾きをそのまま点を通る直線の式へ入れればよい。

例題 3：点を通る平行な直線

点 $P(-1, 2)$ を通り、直線 $2x - y + 5 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。

例題 3 の解答・解説

基準となる直線を $y = mx + n$ の形に直す。

$$2x - y + 5 = 0$$

$$-y = -2x - 5$$

$$y = 2x + 5$$

したがって、傾きは 2 である。

求める直線も傾きが 2 であり、点 $P(-1, 2)$ を通るので、

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

である。整理すると、

$$y - 2 = 2x + 2$$

$$y = 2x + 4$$

したがって、求める直線は $y = 2x + 4$ である。

検算すると、 $x = -1$ のとき $y = 2$ となるので点 P を通る。また、傾きは基準となる直線と同じ 2 である。

6. 点を通る垂直な直線を求める

垂直なら傾きを変えてから式を作る

縦向きでも横向きでもない直線に垂直な直線を求めるときは、基準となる直線の傾きを m とすると、求める直線の傾きは $-\frac{1}{m}$ である。

したがって、

1. 基準となる直線の傾きを求める。
2. 積が -1 になる傾きへ変える。
3. 指定された点を通る直線の式を作る。
4. 点を通ることと、傾きの積が -1 であることを検算する。

という順序で進めるとよい。

例題 4：垂直な直線の例外

点 $A(2, 3)$ を通り、直線 $x = -4$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

例題 4 の解答・解説

直線 $x = -4$ は縦向きである。縦向きの直線に垂直なのは横向きの直線である。

点 $A(2, 3)$ を通る横向きの直線では、どの点でも y 座標が 3 である。

したがって、求める直線は $y = 3$ である。

この問題では基準となる直線の傾きが定まらないため、 $m_1 m_2 = -1$ を使わないことが重要である。

7. 演習問題

演習 1

次の 2 直線の関係を答えよ。

$$L : y = 4x + 2, \quad m : 2y = 8x - 6$$

演習 2

次の 2 直線の関係を答えよ。

$$L : y = -2x + 5, \quad m : y = \frac{1}{2}x - 1$$

演習 3

次の 2 直線が平行・垂直・そのどちらでもない、のいずれであるか答えよ。

$$L : 2x + 3y - 6 = 0, \quad m : 3x - 2y + 1 = 0$$

演習 4

次の 2 直線の関係をそれぞれ答えよ。

(1) $x = 5$ と $x = -2$

(2) $x = 5$ と $y = 4$

(3) $y = -1$ と $y = 3$

演習 5

点 $P(-2, 1)$ を通り、直線 $y = -3x + 4$ に平行な直線の方程式を求めよ。

演習 6

点 $A(1, 2)$ を通り、直線

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

に垂直な直線の方程式を求めよ。

8. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

L の傾きは 4 である。

m は両辺を 2 で割ると、

$$y = 4x - 3$$

となるので、傾きは 4 である。

2 直線は傾きが等しく、切片は異なる。したがって、 L と m は平行である。

演習 2 の解答・解説

L の傾きは -2 、 m の傾きは $\frac{1}{2}$ である。
積を計算すると、

$$(-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$$

となる。
したがって、 L と m は垂直である。

演習 3 の解答・解説

それぞれの直線を $y = mx + n$ の形に直す。
 L について、

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 3y &= -2x + 6 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$

である。したがって、 L の傾きは $-\frac{2}{3}$ である。
 m について、

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 1 &= 0 \\ -2y &= -3x - 1 \\ y &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 m の傾きは $\frac{3}{2}$ である。
2 つの傾きの積は、

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} = -1$$

となる。
したがって、2 直線は垂直である。

演習 4 の解答・解説

- (1) $x = 5$ と $x = -2$ は、どちらも縦向きの異なる直線である。したがって平行である。
(2) $x = 5$ は縦向き、 $y = 4$ は横向きである。したがって垂直である。
(3) $y = -1$ と $y = 3$ は、どちらも横向きの異なる直線である。したがって平行である。
縦向きの直線が含まれる場合は傾きの積を使わず、直線の向きを直接見るのが安全である。

演習 5 の解答・解説

基準となる直線 $y = -3x + 4$ の傾きは -3 である。

平行な直線の傾きも -3 である。点 $P(-2, 1)$ を通るので、

$$y - 1 = -3(x + 2)$$

となる。

整理すると、

$$y - 1 = -3x - 6$$

$$y = -3x - 5$$

したがって、求める直線は $y = -3x - 5$ である。

検算すると、 $x = -2$ を代入したとき $y = 1$ となり、点 P を通る。また、基準となる直線と傾きがともに -3 なので平行である。

演習 6 の解答・解説

基準となる直線の傾きは $\frac{1}{2}$ である。

求める直線の傾きを m とすると、垂直であるため、

$$\frac{1}{2}m = -1$$

である。したがって、 $m = -2$ である。

点 $A(1, 2)$ を通るので、

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

となる。

整理すると、

$$y - 2 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 4$$

したがって、求める直線は $y = -2x + 4$ である。

点を通るか確認すると、 $x = 1$ のとき $y = 2$ となる。また、傾きについて、

$$\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

となるので、元の直線と垂直であることも確認できる。

さらに 2 直線を図で確認する。2 直線の交点は $(0, 4)$ であり、求めた直線は点 $A(1, 2)$ を通っている。

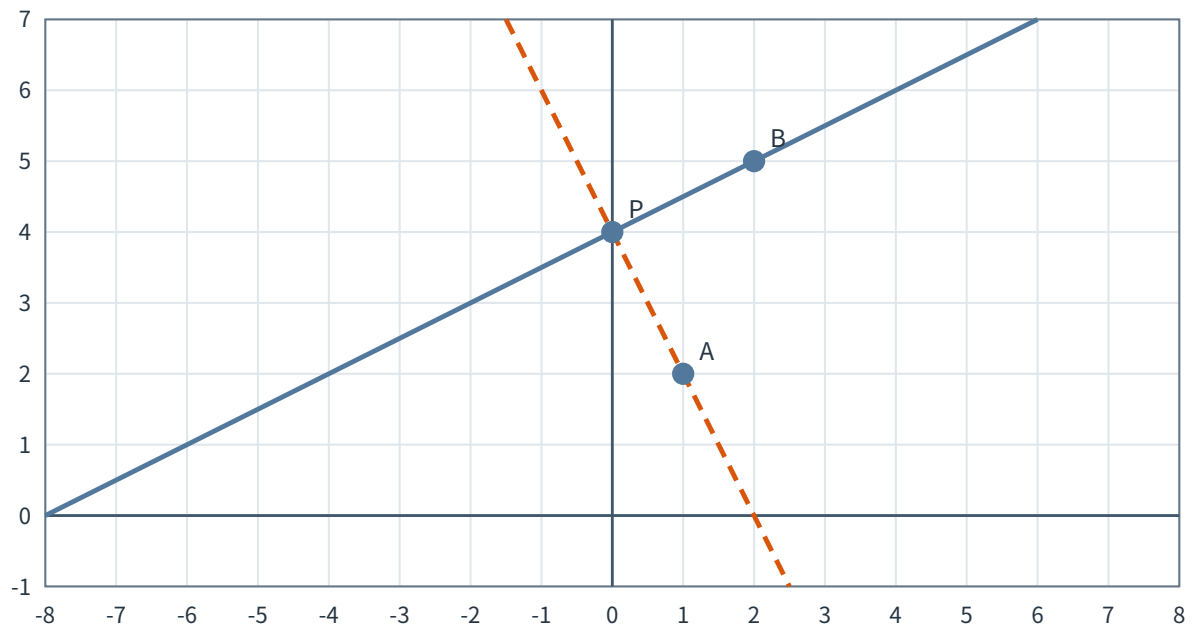


図3 同じ目盛り幅で見た演習6の2直線。Aは求めた直線上、Pは交点

元の直線と求めた直線は $P(0, 4)$ で直角に交わる。 P から元の直線上の $B(2, 5)$ へは右に2・上に1、 P から $A(1, 2)$ へは右に1・下に2進む。求めた直線が A を通ることを図で確認し、傾きの積が -1 になることを式でも確かめる。