

第 100 講 連立不等式が表す領域

学習目標

- 2つの不等式をともに満たす点が、2つの領域の共通部分にあることを説明できる。
- それぞれの境界を確認し、2条件を同時に満たす部分を正しく判断できる。
- 境界どうしの交点を連立方程式で求め、その点が領域に含まれるか判定できる。
- 一方が狭義不等式の場合に、対応する境界と交点が領域に含まれるか判断できる。

2つの条件をともに満たす点を残す

第 99 講では、1つの不等式が平面上の1つの領域を表すことを扱った。2つの不等式が同時に与えられたときは、**両方の条件をともに満たす点だけ**を残せばよい。

代表例として、 $y \geq x + 1$ と $y \leq -x + 3$ を考える。

$y \geq x + 1$ が表すのは、直線 $y = x + 1$ の上側と境界線である。

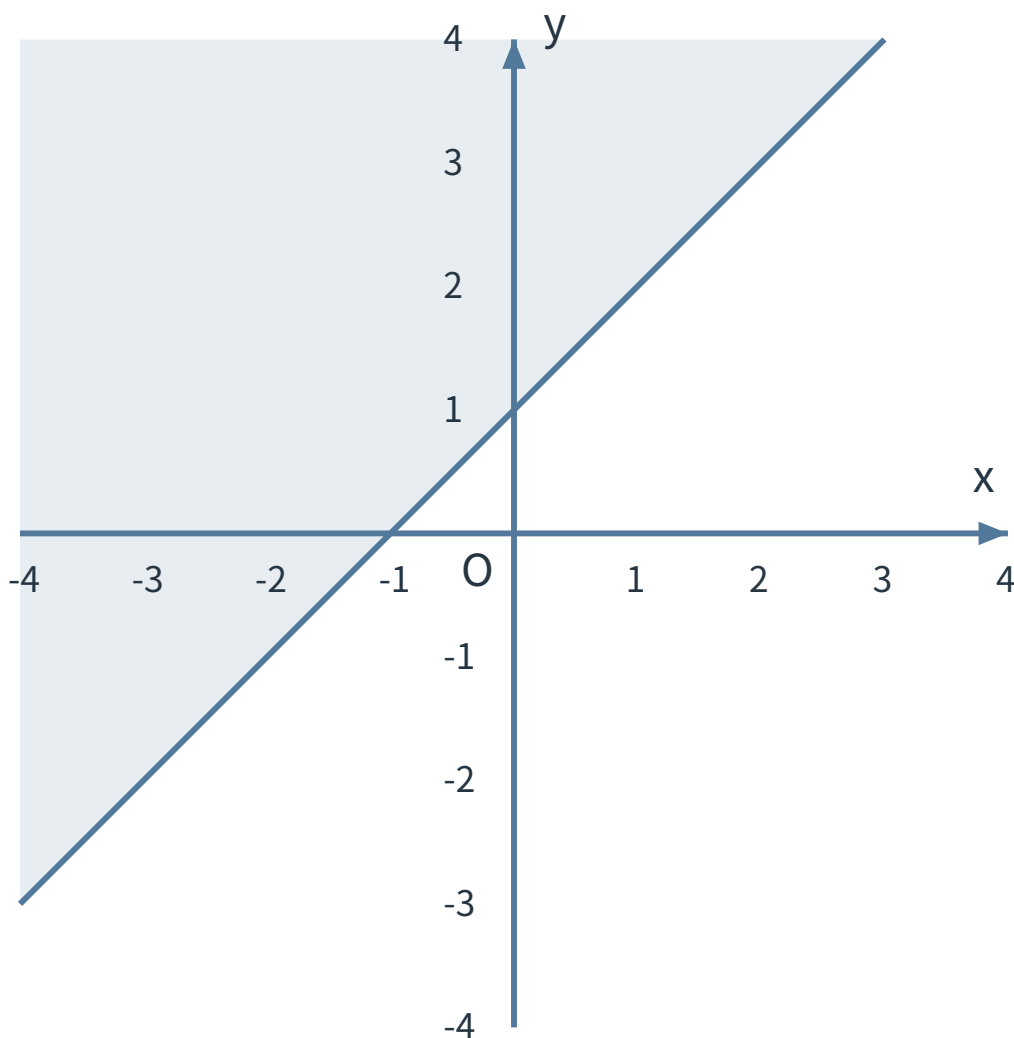


図 1 $y \geq x + 1$ が表す領域

一方、 $y \leq -x + 3$ が表すのは、直線 $y = -x + 3$ の下側と境界線である。

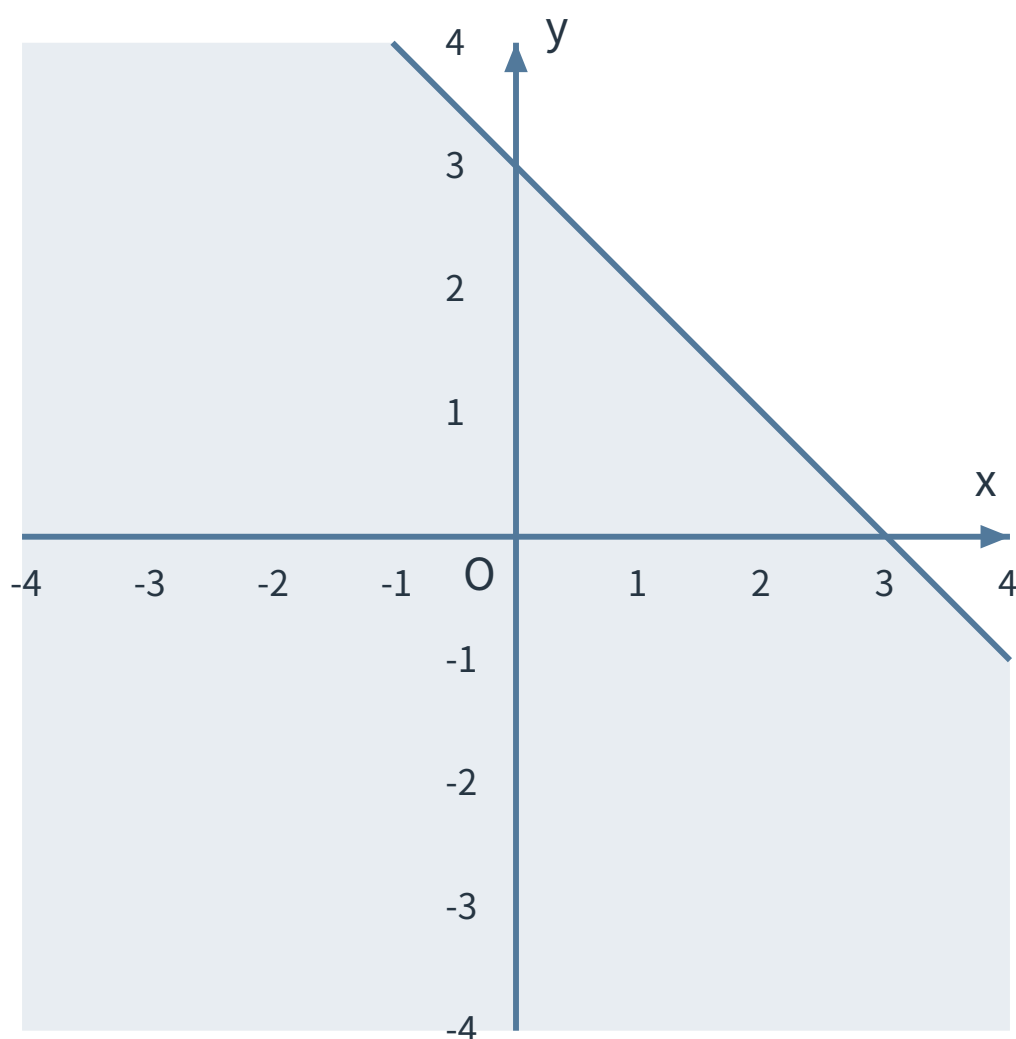


図2 $y \leq -x + 3$ が表す領域

2つを同時に満たすには、1つ目の領域にも2つ目の領域にも入っていないといけない。したがって、求める領域は2つの領域が重なっている部分である。

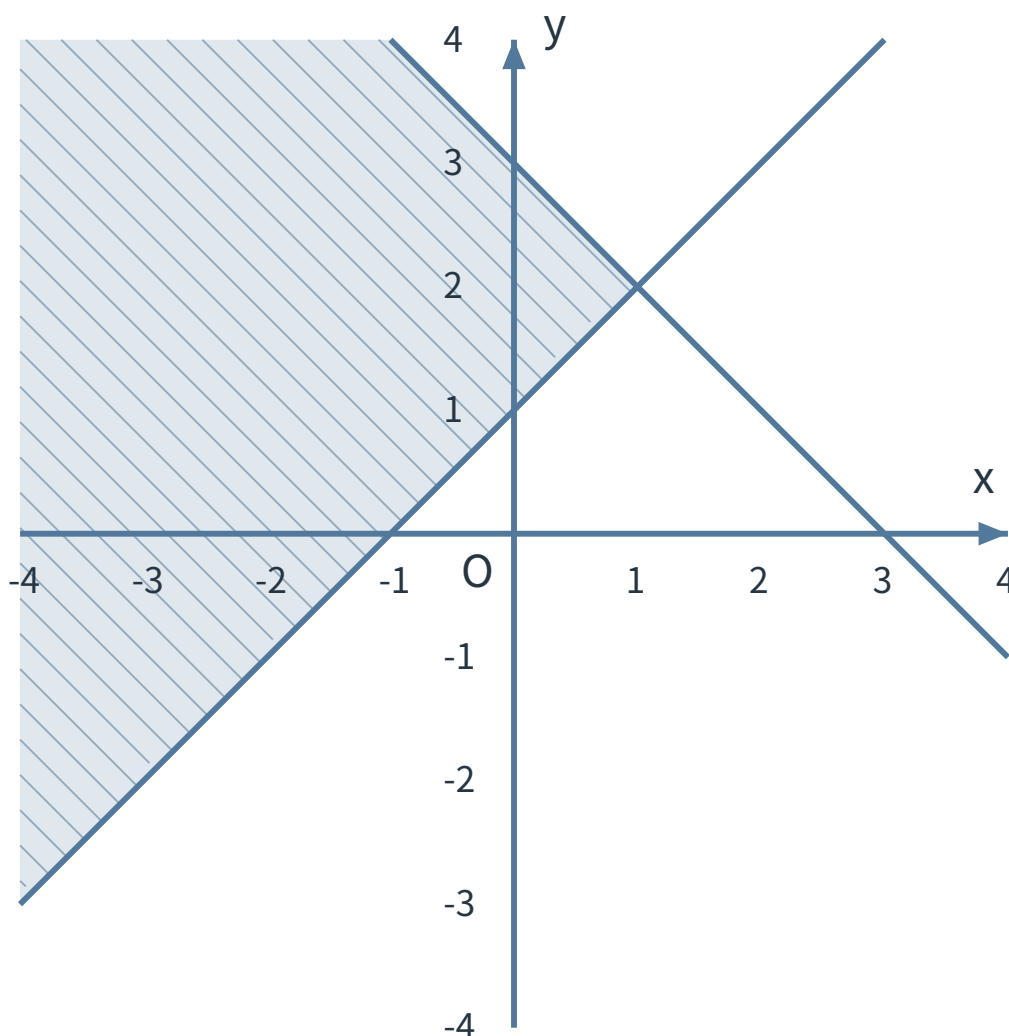


図3 $y \geq x + 1$ と $y \leq -x + 3$ をともに満たす共通部分

たとえば点 $(0, 2)$ では、 $2 \geq 1$ と $2 \leq 3$ がどちらも成り立つ。したがって、 $(0, 2)$ は共通部分に含まれる。

点 $(0, 0)$ では $0 \geq 1$ が成り立たないため、もう一方の条件を満たしていても共通部分には入らない。2条件のうち一方だけを満たしても不十分である。

2つの境界の交点を求める

共通部分の形を正確に捉えるには、2つの境界線がどこで交わるかを求めることが重要である。境界線 $y = x + 1$ と $y = -x + 3$ の交点では、同じ y の値をもつため、次のように連立する。

$$x + 1 = -x + 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$x = 1$ を $y = x + 1$ に代入すると $y = 2$ である。したがって、2つの境界線の交点は $(1, 2)$ である。この例ではどちらも $\geq$ 、 $\leq$ であり、両方の境界線を含む。交点 $(1, 2)$ では $2 = 1 + 1$ と $2 = -1 + 3$ が同時に成り立つため、交点も領域に含まれる。

共通部分を判断する手順

2つの不等式が表す領域では、次の順に考えるとよい。

1. それぞれの不等式が表す領域を確認する。
2. 2つの境界が交わる場合は、境界の方程式を連立して交点を求める。
3. 両方の不等式を同時に満たす部分だけを残す。
4. 各不等号を見て、それぞれの境界を含むかどうかを確認する。
5. 交点についても、元の2つの不等式をともに満たすかを確認する。

「共通部分」は、条件を1つずつ別々に見るだけではなく、**同じ点が2条件を同時に満たすか**を見る考え方である。

境界上の点も2つの条件で確認する

境界上にあるというだけでは、その点が共通部分に入るとは限らない。もう一方の条件も満たす必要がある。

$y \geq x + 1$ と $y \leq -x + 3$ について、点 $A(0, 1)$ は1つ目の境界 $y = x + 1$ 上にある。

$A(0, 1)$ をもう一方へ代入すると $1 \leq 3$ が成り立つ。したがって、 A は共通部分に含まれる。

また、点 $B(0, 3)$ は2つ目の境界 $y = -x + 3$ 上にある。もう一方についても $3 \geq 1$ が成り立つため、 B も共通部分に含まれる。

境界上の点でも、2条件の両方を確認することが必要である。

一方が狭義不等式なら境界は除かれる

次に、1つ目だけを $y > x + 1$ に変え、 $y > x + 1$ と $y \leq -x + 3$ を考える。

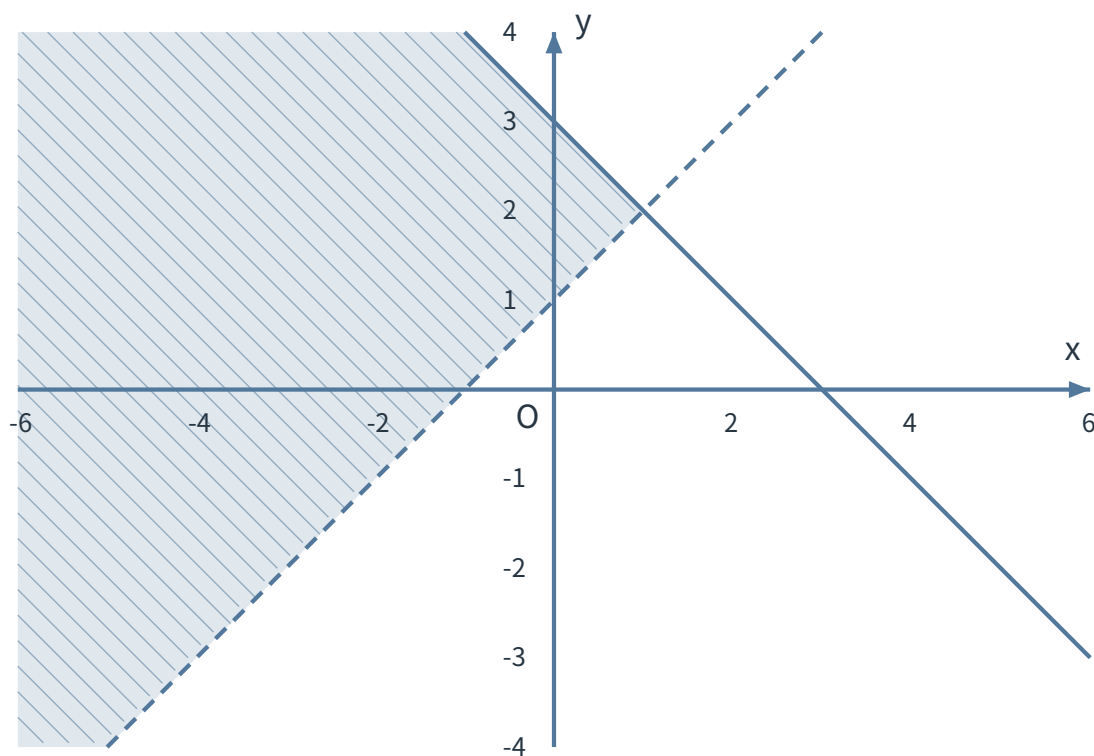


図4 $y > x + 1$ と $y \leq -x + 3$ をともに満たす領域

塗る側そのものは先ほどと同じであるが、直線 $y = x + 1$ は領域に含まれないので破線になる。一方、直線 $y = -x + 3$ は $\leq$ に対応するため実線である。

2つの境界線そのものは変わらないので、交点は引き続き $(1, 2)$ である。

しかし、 $(1, 2)$ を $y > x + 1$ に代入すると $2 > 2$ となり、これは成り立たない。したがって、交点 $(1, 2)$ はこの領域には含まれない。

このように、交点を求める計算と、その交点を領域に含めるかどうかの判断は別に行う必要がある。

交点が求まっても、自動的に領域へ含めない

境界線どうしの交点は、あくまで境界が交わる位置である。

元の不等式に $>$ や $<$ が含まれていれば、その境界上の点は条件を満たさない。したがって、交点についても元の不等式へ代入して確認する必要がある。

例題

例題 1

2つの不等式 $y \geq x - 1$ と $y \leq -x + 3$ が表す共通部分を考える。

(1) 2つの境界線の交点を求めよ。

(2) 交点は共通部分に含まれるか答えよ。

(3) 点 $(0, 1)$ は共通部分に含まれるか、2つの不等式へ代入して判定せよ。

例題 1 の解答・解説

(1) 境界線は $y = x - 1$ と $y = -x + 3$ である。交点では両方の y が等しいので、

$$x - 1 = -x + 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$x = 2$ を $y = x - 1$ に代入すると $y = 1$ である。したがって、交点は $(2, 1)$ である。

(2) 2つの不等式はいずれも等号を含む。実際に $(2, 1)$ を代入すると、 $1 \geq 1$ と $1 \leq 1$ がともに成り立つ。したがって、交点 $(2, 1)$ は共通部分に含まれる。

(3) 点 $(0, 1)$ を代入すると、 $1 \geq -1$ と $1 \leq 3$ がともに成り立つ。したがって、 $(0, 1)$ は共通部分に含まれる。

計算と条件の判定に対応する共通部分を図で確認する。

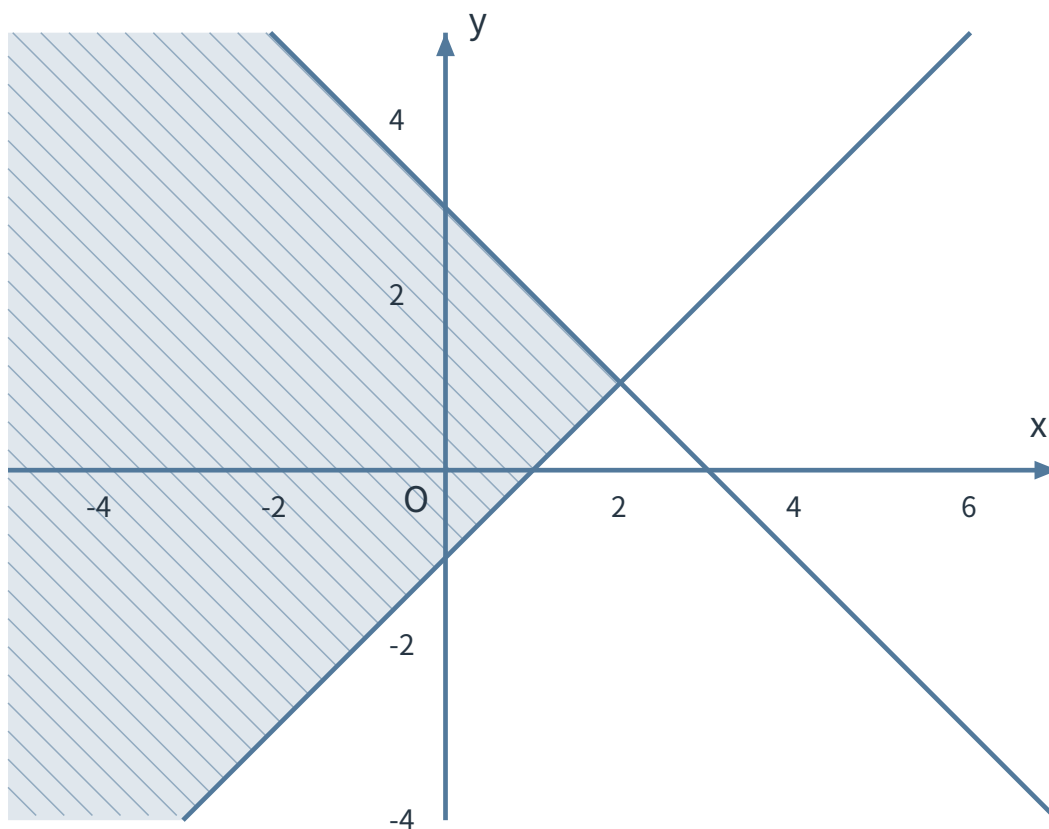


図5 $y \geq x - 1$ と $y \leq -x + 3$ の共通部分、境界の交点は $(2, 1)$

例題 2

2つの不等式 $y > x - 1$ と $y \leq -x + 3$ が表す領域を考える。

- (1) 2つの境界線の交点を求めよ。
- (2) 交点は領域に含まれるか答えよ。
- (3) 2つの境界線が実線か破線か、それぞれ答えよ。

例題 2 の解答・解説

- (1) 境界線は例題 1 と同じ $y = x - 1$ と $y = -x + 3$ である。したがって、交点は $(2, 1)$ である。
- (2) 点 $(2, 1)$ を 1 つ目の不等式へ代入すると $1 > 1$ となり、これは成り立たない。したがって、交点 $(2, 1)$ は領域に含まれない。
- (3) $y > x - 1$ は等号を含まないので、境界 $y = x - 1$ は破線である。 $y \leq -x + 3$ は等号を含むので、境界 $y = -x + 3$ は実線である。

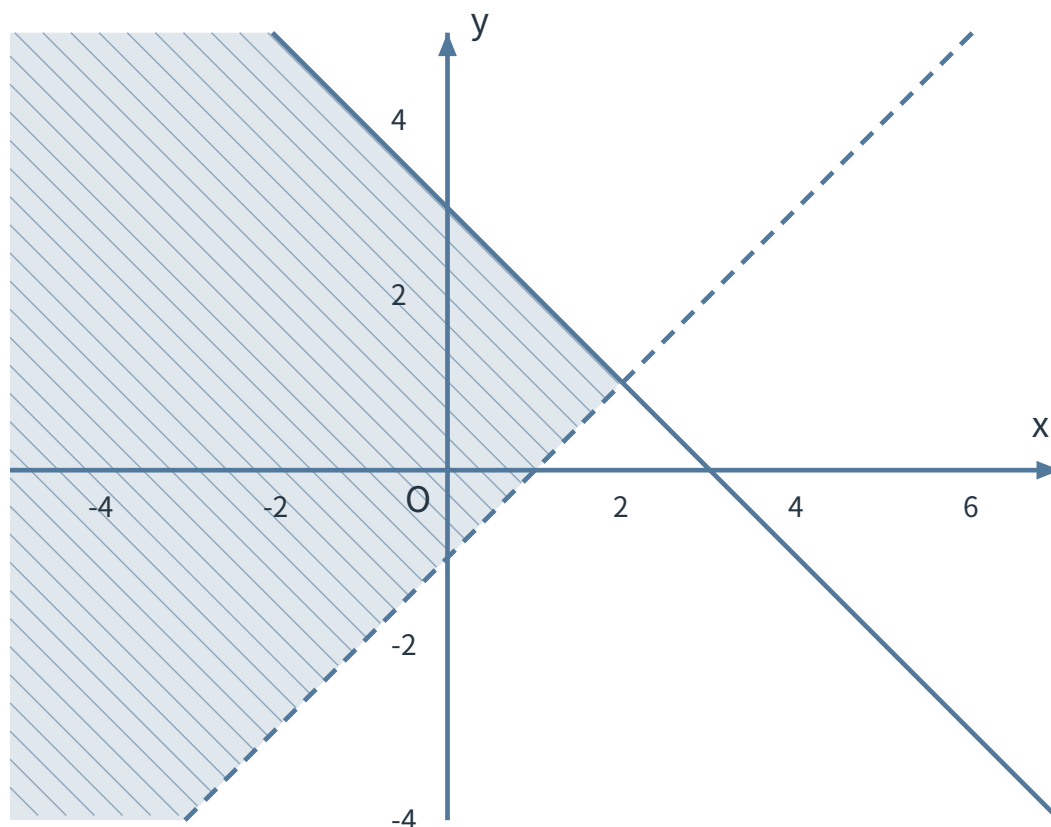


図6 $y > x - 1$ と $y \leq -x + 3$ の共通部分、交点 $(2, 1)$ は含まれない

例題 3

2つの不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $y \geq 0$ をともに満たす領域を説明せよ。また、点 $(0, 0)$ 、 $(0, 3)$ 、 $(0, -2)$ がそれぞれ領域に含まれるか判定せよ。

例題 3 の解答・解説

$x^2 + y^2 \leq 9$ は、中心が原点、半径が 3 の円の内側と円周を表す。

$y \geq 0$ は、 x 軸より上側と x 軸を表す。

したがって、2条件をともに満たすのは、半径 3 の円の内側と円周のうち x 軸以上にある部分である。円周も x 軸も境界として含まれる。

点 $(0, 0)$ では $0 \leq 9$ と $0 \geq 0$ がともに成り立つため、領域に含まれる。

点 $(0, 3)$ では $9 \leq 9$ と $3 \geq 0$ がともに成り立つため、領域に含まれる。この点は円周上にある。

点 $(0, -2)$ では $4 \leq 9$ は成り立つが、 $-2 \geq 0$ は成り立たない。したがって、領域には含まれない。

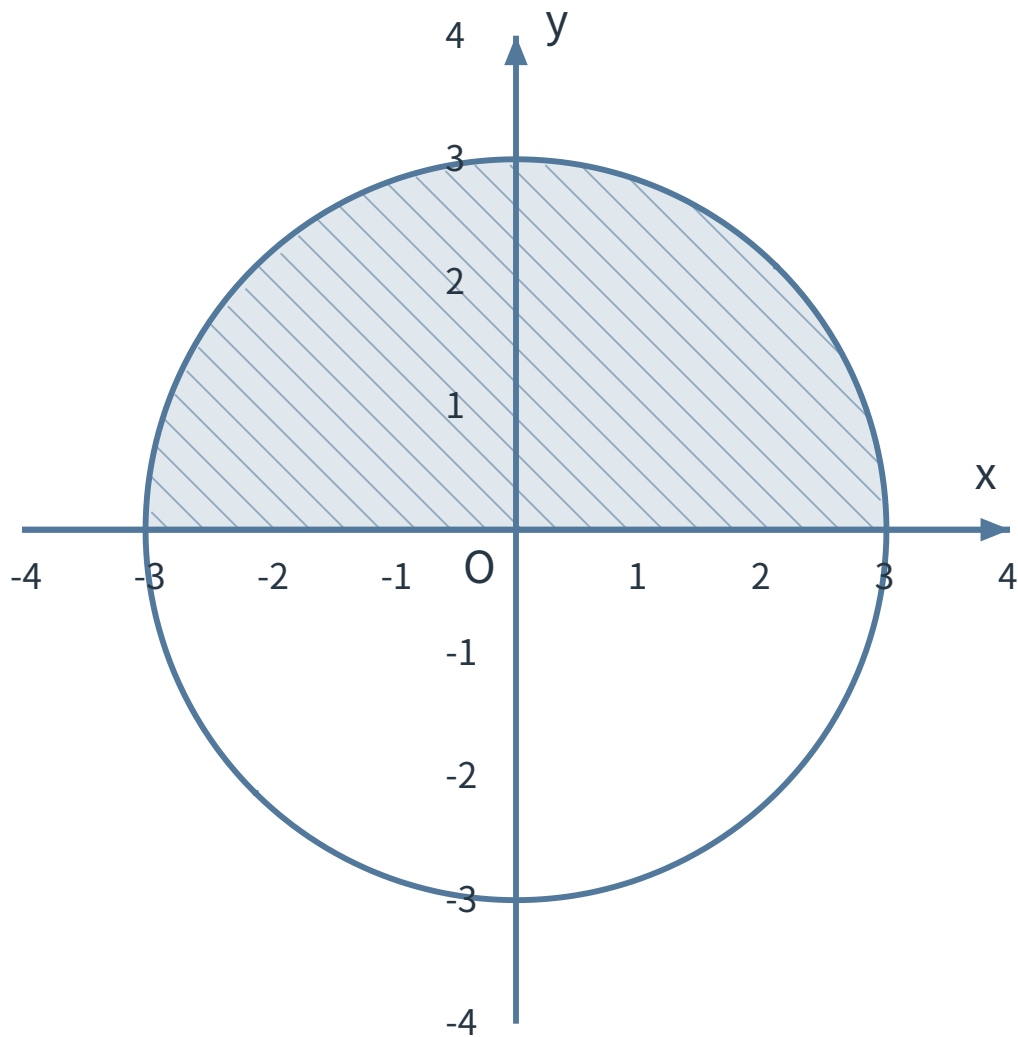


図7 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $y \geq 0$ をともに満たす領域

演習問題

演習問題 1

2つの不等式 $y \geq x$ と $y \leq -x + 4$ について、境界線どうしの交点を求めよ。また、その交点が共通部分に含まれるか答えよ。

演習問題 2

2つの不等式 $y > x$ と $y \leq -x + 4$ について、境界線どうしの交点を求めよ。また、その交点が領域に含まれるか答えよ。

演習問題 3

2つの不等式 $y \geq x + 2$ と $y \leq -x + 4$ を考える。点 $A(0, 3)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $C(2, 3)$ のうち、2つの不等式をともに満たす点をすべて答えよ。

演習問題 4

2つの不等式 $y \geq -x + 1$ と $y \leq x + 3$ を考える。

- (1) 2つの境界線の交点を求めよ。
- (2) 点 $(0, 2)$ は共通部分に含まれるか判定せよ。
- (3) 点 $(0, 0)$ は共通部分に含まれるか判定せよ。

演習問題 5

円 $x^2 + y^2 = 16$ の内側と円周のうち、 x 軸以下にある部分を表す 2つの不等式を書け。また、点 $(0, -4)$ と $(0, 4)$ がその共通部分に含まれるか答えよ。

演習問題 6

2つの不等式 $x^2 + y^2 < 9$ と $y \geq 0$ をともに満たす領域について、円周と x 軸がそれぞれ領域に含まれるか答えよ。また、点 $(3, 0)$ が領域に含まれるか判定せよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

境界線は $y = x$ と $y = -x + 4$ である。交点では、

$$x = -x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$x = 2$ のとき $y = 2$ なので、交点は $(2, 2)$ である。

2つの不等式はどちらも等号を含む。実際に $(2, 2)$ を代入すると $2 \geq 2$ と $2 \leq 2$ がともに成り立つ。したがって、交点 $(2, 2)$ は共通部分に含まれる。

演習問題 2 の解答・解説

境界線は $y = x$ と $y = -x + 4$ であり、交点は演習問題 1 と同じ $(2, 2)$ である。

しかし、1つ目の不等式は $y > x$ である。 $(2, 2)$ を代入すると $2 > 2$ となり、これは成り立たない。したがって、交点 $(2, 2)$ は領域に含まれない。境界 $y = x$ は破線、境界 $y = -x + 4$ は実線である。

演習問題 3 の解答・解説

点 $A(0, 3)$ では、 $3 \geq 2$ と $3 \leq 4$ がともに成り立つ。したがって、 A は共通部分に含まれる。

点 $B(0, 1)$ では、 $1 \geq 2$ が成り立たない。したがって、 B は共通部分に含まれない。

点 $C(2, 3)$ では、 $3 \geq 4$ が成り立たない。したがって、 C は共通部分に含まれない。

よって、2つの不等式をともに満たす点は $A(0, 3)$ だけである。

演習問題 4 の解答・解説

(1) 境界線は $y = -x + 1$ と $y = x + 3$ である。交点では、

$$-x + 1 = x + 3$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

$x = -1$ を $y = -x + 1$ に代入すると $y = 2$ である。したがって、交点は $(-1, 2)$ である。

(2) 点 $(0, 2)$ では $2 \geq 1$ と $2 \leq 3$ がともに成り立つ。したがって、 $(0, 2)$ は共通部分に含まれる。

(3) 点 $(0, 0)$ では $0 \geq 1$ が成り立たない。したがって、 $(0, 0)$ は共通部分に含まれない。

演習問題 5 の解答・解説

円 $x^2 + y^2 = 16$ の内側と円周は $x^2 + y^2 \leq 16$ と表せる。

x 軸以下は $y \leq 0$ と表せる。

したがって、求める 2 つの不等式は $x^2 + y^2 \leq 16$ と $y \leq 0$ である。

点 $(0, -4)$ では $16 \leq 16$ と $-4 \leq 0$ がともに成り立つため、共通部分に含まれる。

点 $(0, 4)$ では $16 \leq 16$ は成り立つが、 $4 \leq 0$ は成り立たない。したがって、共通部分には含まれない。

演習問題 6 の解答・解説

$x^2 + y^2 < 9$ は等号を含まないため、円周 $x^2 + y^2 = 9$ は領域に含まれない。

一方、 $y \geq 0$ は等号を含むため、 x 軸上の点のうち $x^2 + y^2 < 9$ も満たす部分は領域に含まれる。

点 $(3, 0)$ では $3^2 + 0^2 = 9$ なので、 $9 < 9$ は成り立たない。したがって、 $(3, 0)$ は領域に含まれない。

このように、一方の境界上にある点でも、もう一方の不等式を含めた 2 条件をともに確認する必要がある。