# 第 210 講 定積分の基本

**学習目標**

定積分を原始関数の端点差として理解し、微積分の基本定理を用いて値を求められるようになる。
また、積分区間の条件を確認し、定積分の値と通常の面積の違いを説明できるようになる。

## 定積分は原始関数の端点差で計算する

定積分を考えるときは、積分する区間と関数の条件を確認する必要がある。
ここでは、$a, b$ を実数とし、$a < b$ とする。また、関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続であり、関数 $F(x)$ は同じ閉区間 $[a, b]$ で連続で、区間の内点で $F'(x) = f(x)$ を満たす原始関数であるとする。
この条件のもとで、微積分の基本定理により定積分は原始関数の端点差で計算できる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

この式を、次の記号で表すこともある。

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ここで、左側の $[F(x)]_a^b$ は上端 $b$ と下端 $a$ における原始関数の値の差を表している。
定積分の計算では、被積分関数 $f(x)$ の値の差を求めるのではなく、原始関数 $F(x)$ の値の差を求めることが重要である。

**定積分の記号の意味**

次の定積分の記号を確認する。

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

それぞれの部分に次の意味がある。
- $\int$ は積分を表す記号である。
- $a$ は下端、$b$ は上端を表す。
- $f(x)$ は被積分関数であり、積分する対象となる関数である。
- $x$ は積分変数であり、どの変数について積分するかを表す。
- $dx$ は積分変数が $x$ であることを示す。

固定された端点 $a, b$ に対する定積分の結果は数であり、計算後に $x$ や積分定数 $+C$ が残ることはない。

### 端点差による計算

$f(x)=2x$ の原始関数として $F(x)=x^2$ を考える。
1 から 3 までの定積分は、被積分関数の端点の差 $f(3)-f(1)$ ではなく、原始関数の端点差 $F(3)-F(1)$ で求める。

$$\begin{aligned}\int_1^3 2x\,dx &= \left[x^2\right]_1^3 \\ &= 3^2-1^2 \\ &= 8\end{aligned}$$

したがって、$\int_1^3 2x\,dx=8$ である。

## 積分定数が消える理由

原始関数には任意の実定数を加えることができる。
原始関数は 1 つに決まるとは限らない。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、任意の実定数 $C$ に対して $F(x)+C$ も $f(x)$ の別の原始関数になり得る。ここで加える $C$ は端点の両方へ同じ値として入るため、定積分では端点差を取ることで相殺される。

$$\begin{aligned}\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\} &= F(b)+C-F(a)-C \\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

したがって、定積分の値は、どの原始関数を選んでも変わらない。

### 定積分を計算する前の条件確認

原始関数の端点差によって定積分を計算するときは、積分区間である閉区間 $[a,b]$ 全体について関数の定義と連続性を確認する。
区間の途中だけでなく、両端を含めたすべての点で条件を満たしているかを見る必要がある。
例えば $f(x)=\frac{1}{x}$ は $x=0$ で定義されないため、区間 $[-1,1]$ 全体で連続ではない。 したがって、この区間に対して端点差の公式を機械的に適用してはいけない。

## 定積分の値は符号付きの量である

定積分は、グラフと $x$ 軸の間の領域の大きさを表す場合があるが、常に通常の面積と同じになるわけではない。
下端が上端より小さい場合、定積分の値はグラフと $x$ 軸の位置関係によって正または負の寄与を持つ符号付きの量として表される。
定積分の値は、原始関数の端点差 $F(b)-F(a)$ として求められる一方、通常の面積では領域の大きさをすべて正の値として考える。この違いを具体的な図で確認する。

## 正の領域だけを含む場合

関数 $y=x+1$ の $0\le x\le 2$ における、$x$ 軸との間の領域を示す。

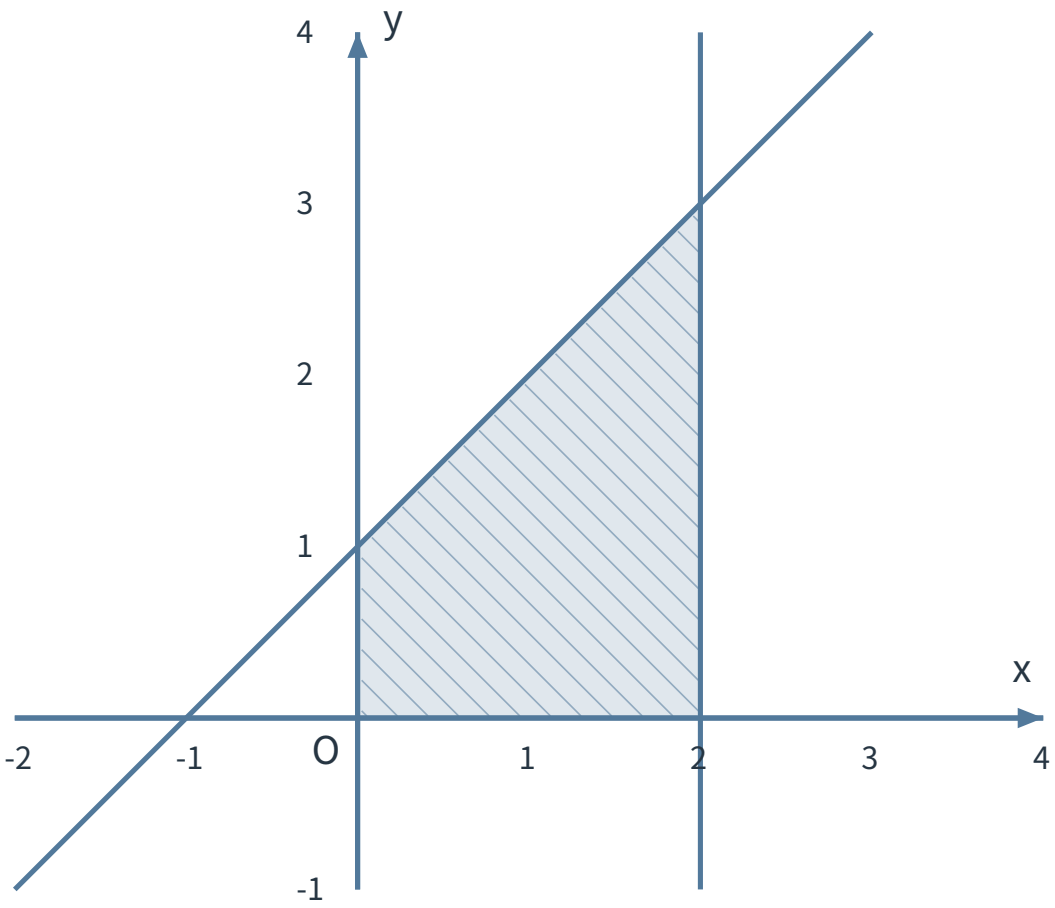


**図 1**　$y = x + 1$ の $0 \leq x \leq 2$ における $x$ 軸との間の領域

この領域はすべて $x$ 軸より上にあるため、定積分の値と通常の面積が一致する。

$$\int_0^2 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$= 4$$

したがって、定積分の値は 4 であり、通常の面積も 4 になる。

### 負の領域を含む場合

関数 $y = -x - 1$ の $0 \leq x \leq 2$ における、$x$ 軸との間の領域を示す。

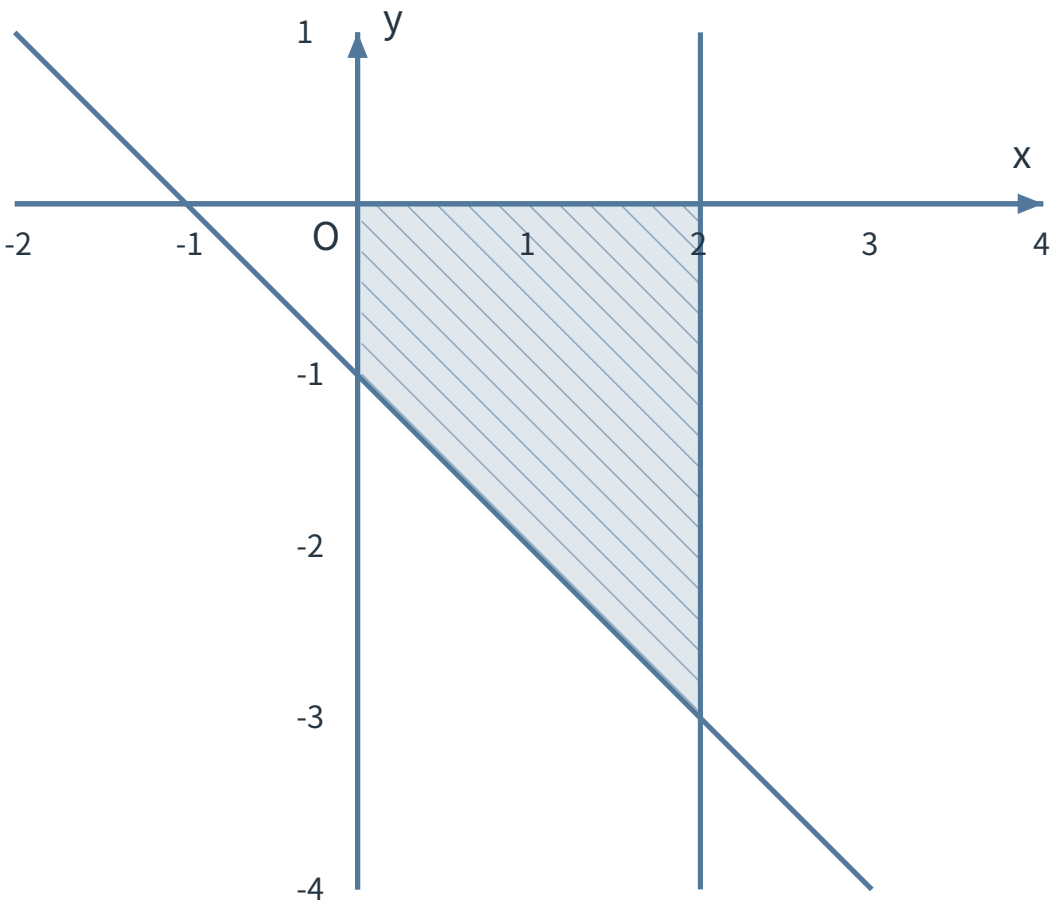


**図 2**　$y=-x-1$ の $0 \leq x \leq 2$ における $x$ 軸との間の領域

この領域はすべて $x$ 軸より下にあるため、定積分では負の値になる。ただし、通常の面積では領域の大きさを正として数える。

$$\int_0^2 (-x-1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2$$

$$= -4$$

したがって、定積分の値は $-4$ である。一方、通常の面積は $4$ であり、符号が異なる理由は $x$ 軸より下の領域が負の寄与として扱われるためである。

### 正負の領域が分かれる場合

関数 $y=x-1$ の $0 \leq x \leq 3$ における領域を、負の部分と正の部分に分けて示す。

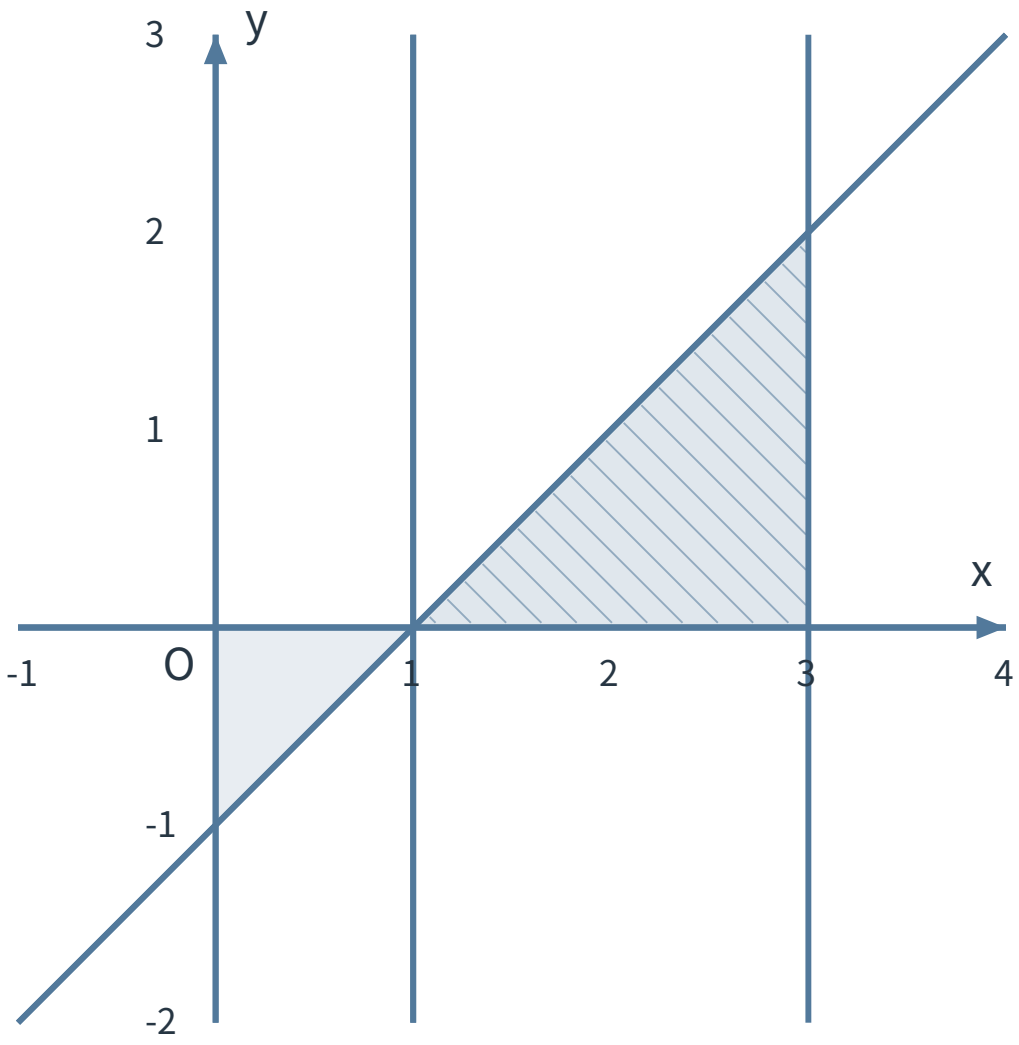


**図 3**　$y = x - 1$ の $0 \leq x \leq 3$ における負側と正側の領域

$y = x - 1$ では、$x = 1$ を境にして関数の値の符号が変化するため、定積分では負の寄与と正の寄与が現れる。

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3$$

$$= \frac{3}{2}$$

したがって、定積分の値は $\frac{3}{2}$ である。負の部分と正の部分の大きさが単純に足されるのではなく、符号付きで足し合わせられるためである。
通常の面積は、負の部分を正の大きさとして考える。図の 2 つの三角形の面積を考えると、負の部分は $\frac{1}{2}$、正の部分は 2 であるため、通常の面積は $\frac{5}{2}$ になる。
したがって、定積分の値 $\frac{3}{2}$ と通常の面積 $\frac{5}{2}$ は異なる。 定積分全体の絶対値を取れば通常の面積になるとは限らない。今回の場合、定積分の値は $\frac{3}{2}$ であるため、$\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ となり、通常の面積 $\frac{5}{2}$ とは異なる。

# 例題

**例題 1**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x)\, dx$$

## 例題 1 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = x^2 - 2x$ は多項式であり、閉区間 $[-1, 2]$ で連続である。
原始関数 $F(x)$ を求めると、$F'(x) = f(x)$ を満たすものとして次を得る。

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$$

したがって、微積分の基本定理より、定積分は原始関数の端点差で求められる。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x)\, dx &= \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^{2} \\
&= \left( \frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - \left( \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 \right) \\
&= \left( \frac{8}{3} - 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 1 \right) \\
&= -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

下端が負の値であるため、$x = -1$ を代入するときは括弧を付けて計算する必要がある。
したがって、$\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x)\, dx = 0$ である。
なお、原始関数へ加える任意定数 $C$ は端点差を取ると相殺されるため、計算では考える必要がない。

**例題 2**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

### 例題 2 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = \cos x$ は三角関数であり、閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で連続である。
また、弧度法で考えると、$\cos x$ の原始関数は $F(x) = \sin x$ であり、$F'(x) = \cos x$ を満たす。
したがって、微積分の基本定理より、原始関数の端点差を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx &= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

したがって、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$ である。
ここでも固定された端点での定積分なので、結果に $x$ や $+C$ は残らない。

**例題 3**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

### 例題 3 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $[1, e]$ では定義され、連続である。
また、自然対数の性質より、$F(x) = \log x$ はこの区間で $F'(x) = \frac{1}{x}$ を満たす原始関数である。
したがって、微積分の基本定理より、原始関数の端点差を求める。

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x} \, dx &= \left[\log x\right]_1^e \\ &= \log e - \log 1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

したがって、$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = 1$ である。
区間 $[1, e]$ は $x = 0$ を含まないため、閉区間全体で連続性を確認でき、端点差による計算を適用できる。

## 演習

**演習問題 1**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) \, dx$$

**演習問題 2**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-2}^{-1} x^2\,dx$$

**演習問題 3**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx$$

**演習問題 4**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{0}^{1} 2^x\,dx$$

**演習問題 5**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$$

**演習問題 6**

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

**演習問題 7**

次の考え方が正しいか判定し、理由を説明しなさい。

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \log|\ 1\ | - \log|-1\ | = 0$$

**演習問題 8**

関数 $y = x - 1$ について、区間 $0 \leq x \leq 3$ における定積分の値と、グラフと $x$ 軸の間の通常の面積を比較し、異なる理由を説明しなさい。

# 演習の解答・解説

## 演習問題 1 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ は多項式であり、閉区間 $[0, 2]$ で連続である。
原始関数 $F(x)$ を求めると、$F'(x) = f(x)$ を満たすものとして次を得る。

$$F(x) = x^3 - x^2 + x$$

したがって、微積分の基本定理より上端と下端の差を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx &= \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 \\ &= (2^3 - 2^2 + 2) - (0^3 - 0^2 + 0) \\ &= 8 - 4 + 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

したがって、$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = 6$ である。

## 演習問題 2 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = x^2$ は多項式であり、閉区間 $[-2, -1]$ で連続である。
原始関数 $F(x)$ は $F'(x) = x^2$ を満たすため、次のように定める。

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

したがって、上端 $-1$ の値から下端 $-2$ の値を引く。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} x^2\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} \\ &= \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

負の端点を代入するときは、括弧を付けて計算することで符号の間違いを防ぐことができる。
したがって、$\int_{-2}^{-1} x^2\,dx = \frac{7}{3}$ である。

## 演習問題 3 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = e^{2x}$ は指数関数であり、閉区間 $[0, 1]$ で連続である。
原始関数 $F(x)$ は $F'(x) = e^{2x}$ を満たすため、次のようになる。

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

したがって、上端と下端の値の差を求める。

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x}\,dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2 - 1}{2}\end{aligned}$$

したがって、$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2-1}{2}$ である。

## 演習問題 4 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = 2^x$ は指数関数であり、閉区間 $[0, 1]$ で連続である。
一般の底 $a > 0$、$a \neq 1$ に対して、$a^x$ の原始関数は自然対数 $\log a$ を用いて表される。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$$

したがって、$a = 2$ の場合には次の原始関数を用いる。

$$F(x) = \frac{2^x}{\log 2}$$

ここで、log は自然対数を表す。
上端と下端の値の差を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^1 2^x\,dx &= \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2^1}{\log 2} - \frac{2^0}{\log 2} \\ &= \frac{2 - 1}{\log 2} \\ &= \frac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

したがって、$\int_0^1 2^x\,dx = \frac{1}{\log 2}$ である。

## 演習問題 5 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = \sin x$ は三角関数であり、閉区間 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ で連続である。
弧度法で考えると、$\sin x$ の原始関数は $F(x) = -\cos x$ であり、$F'(x) = \sin x$ を満たす。
したがって、微積分の基本定理より上端と下端の値の差を求める。

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx &= \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= -\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

したがって、$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx = 1$ である。

## 演習問題 6 の解答・解説

被積分関数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ は $x = 0$ では定義されないが、区間 $[1, 2]$ では定義され、連続である。
原始関数は $F(x) = -\frac{1}{x}$ であり、$F'(x) = \frac{1}{x^2}$ を満たす。
したがって、微積分の基本定理より上端と下端の差を計算する。

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \, dx &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2} \\ &= -\frac{1}{2} - (-1) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって、$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{1}{2}$ である。

## 演習問題 7 の解答・解説

この計算は正しくない。
関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義されないため、閉区間 $[-1, 1]$ 全体で連続ではない。
したがって、この講で扱っている「閉区間で連続な関数に対して原始関数の端点差を用いる」という公式を、そのまま適用することはできない。
確かに、$x \neq 0$ の範囲では原始関数として $\log|\,x\,|$ を考えることができる。しかし、積分区間 $[-1, 1]$ の内部に定義されない点 $x = 0$ が存在するため、$\left[\log|\,x\,|\right]_{-1}^{1}$ として計算してはいけない。
したがって、$\log|\,1\,| - \log|\,-1\,| = 0$ を用いて、この定積分の値を $0$ とすることはできない。

## 演習問題 8 の解答・解説

関数 $y = x - 1$ は閉区間 $[0, 3]$ で連続である。
定積分は符号付きの量として考える。$x = 1$ より左では $x - 1 < 0$、$x = 1$ より右では $x - 1 > 0$ であるため、負の寄与と正の寄与が生じる。
原始関数は $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$ である。
したがって、定積分は上端と下端の差で求める。

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x-1)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - 3\right) - 0 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって、定積分の値は $\frac{3}{2}$ である。
一方、通常の面積では、$x$ 軸より下の部分も正の大きさとして数える。
$0 \leq x \leq 1$ の部分は底辺 1、高さ 1 の三角形であるため、面積は $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ である。
また、$1 \leq x \leq 3$ の部分は底辺 2、高さ 2 の三角形であるため、面積は $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ である。
したがって、通常の面積は $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ となる。
定積分全体の絶対値を取れば通常の面積になるとは限らない。今回の場合、$\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ であり、通常の面積 $\frac{5}{2}$ とは異なる。これは、定積分では下側の領域が負の寄与として正側の領域と打ち消し合うためである。

©ミライコーチング