第 246 講 極方程式

学習目標

- 極方程式を、条件を満たす点全体を表す式として説明できる。
- $r=$ 一定 と $\theta=$ 一定 が表す図形を、$r \geq 0$ の約束の下で判断できる。
- 極方程式と直交座標の方程式を相互に変換できる。
- 変形の前後で極が追加・脱落していないかを確認できる。

1. 動く点の条件を r と θ で書く

極方程式

極を O、始線を直交座標の x 軸の正の向きとし、動点 P の極座標を (r, θ) とする。本講では、特に断らない限り $r \geq 0$ とする。
r と θ の関係式を満たしながら P が動くとき、その関係式を図形の**極方程式**という。極方程式が表すのは、式を満たす数の組だけでなく、その組が定める平面上の点全体である。
1 つの点が複数の極座標をもつことがあるため、ある点が図形に属するとは、その点を表す極座標のうち少なくとも 1 つが極方程式を満たすことである。特に極では $r=0$ のまま偏角を選べるので、適切な偏角が存在するかを調べる。

式を距離と向きの条件へ戻す

極方程式を読む第一歩は、r を「極からの距離」、θ を「始線からの向き」と読むことである。
たとえば $r=3$ は、向き θ に関係なく極からの距離が 3 である点全体を表す。したがって、極を中心とする半径 3 の円である。一方、$\theta=\frac{\pi}{4}$ は、極から見た向きが 45° である点全体を表す。$r \geq 0$ なので、これは極を端点とする半直線である。

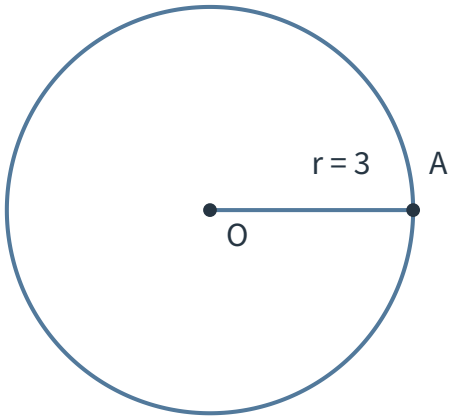

図 1　極方程式 $r=3$ は極を中心とする半径 3 の円を表す

例題 1：基本の極方程式を読む

次の極方程式が表す図形を答えよ。ただし $r \geq 0$ とする。
(1) $r = 5$
(2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

例題 1 の解答・解説

(1) 極からの距離が常に 5 であるから、極を中心とする半径 5 の円である。
(2) 極から見た向きが始線から反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ であるから、その向きに伸びる、極を端点とする半直線である。$r = 0$ も許されるので極を含む。

θ 一定は、いつも直線とは限らない

$r \geq 0$ の約束では $\theta = \alpha$ は半直線である。原点を通る直線全体を表すには、$\theta = \alpha$ と $\theta = \alpha + \pi$ の両方が必要である。
負の動径も許す別の流儀では、(r, α) の $r < 0$ が反対向きの点を表すため、$\theta = \alpha$ だけで直線全体になる。どの流儀かを確かめる必要がある。

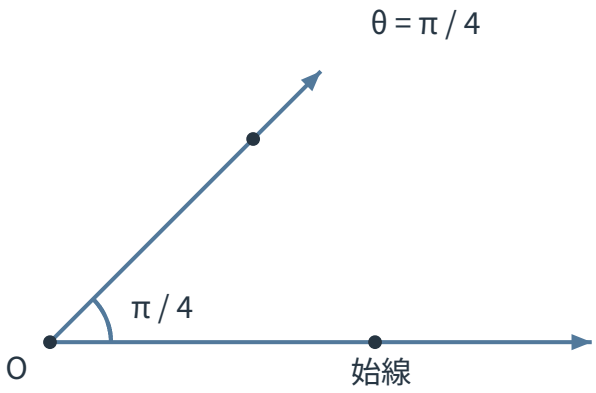

図 2　$r \geq 0$ では $\theta = \frac{\pi}{4}$ は直線全体ではなく半直線である

2. 直交座標へ変換する

変換に使う 3 つの式

点 P の直交座標を (x, y)、極座標を (r, θ) とすると、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

である。$r \geq 0$ なら $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ でもある。極方程式に $r\cos\theta$ や $r\sin\theta$ を作ると、それぞれ x, y へ置き換えられる。

例題 2：極方程式を直交座標の式へ直す

極方程式 $r = 4\cos\theta$ を直交座標の方程式へ直し、表す図形を答えよ。

例題 2 の解答・解説

両辺に r を掛けると、

$$r^2 = 4r\cos\theta$$

となる。$r^2 = x^2 + y^2$、$r\cos\theta = x$ より、

$$x^2 + y^2 = 4x$$

である。平方完成すると、

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

となる。したがって、中心 $(2, 0)$、半径 2 の円である。
ただし、両辺へ r を掛けたので $r = 0$、すなわち極の扱いを確認する。原式では $r = 0$ のとき $0 = 4\cos\theta$ を満たす偏角 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ などが存在するため、極は原式が表す点に含まれる。直交座標の円も $(0, 0)$ を通るので一致する。

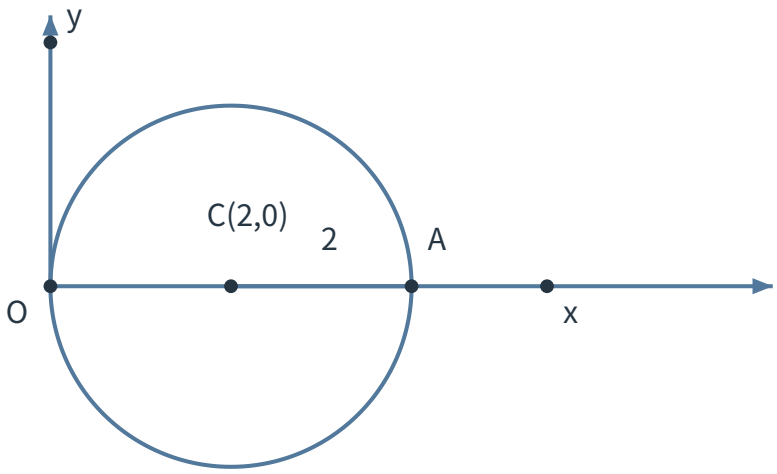

図 3　$r = 4\cos\theta$ は中心 $(2, 0)$、半径 2 の円を表す

右辺が負になる角をどう扱うか

原式 $r = 4\cos\theta$ で $r \geq 0$ とするなら、$\cos\theta < 0$ となる角には解となる r がない。しかし、それで円周の左半分が失われるわけではない。
円周上の点 (x, y) では $x^2 + y^2 = 4x$ なので $x \geq 0$ である。極からその点へ向かう偏角を選べば $\cos\theta = \frac{x}{r} \geq 0$ となり、原式を満たす。極では偏角が定まらないが、上で確認した通り適切な偏角が存在する。したがって原式と円は、点集合として同じである。

---

r で割ると極を失うことがある

$r^2 = 4r\cos\theta$ から $r = 4\cos\theta$ を得るために r で割ると、$r = 0$ の場合を除外してしまう。割り算をするときは、割った量が 0 の場合を原式へ戻して別に調べる必要がある。

---

3. 直交座標の式を極方程式へ直す

x と y を極座標で置き換える

直交座標の式では、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と置き換える。$x^2 + y^2$ があれば r^2 とまとめる。変形後に r で割る場合は、極がもとの図形に含まれるかを先に確認する。

例題 3：直線を極方程式へ直す

直線 $x = 2$ を極方程式へ直せ。ただし $r \geq 0$ とする。

例題 3 の解答・解説

$x = r\cos\theta$ を代入すれば、

$$r\cos\theta = 2$$

である。したがって、これが求める極方程式である。
$\cos\theta = 0$ のとき左辺は 0 なので解はない。$\cos\theta > 0$ の向きに対して $r = \frac{2}{\cos\theta}$ と表せる。一方、$\cos\theta < 0$ なら右辺を満たす $r \geq 0$ はない。これは直線 $x = 2$ が原点の右側だけにあることと一致する。

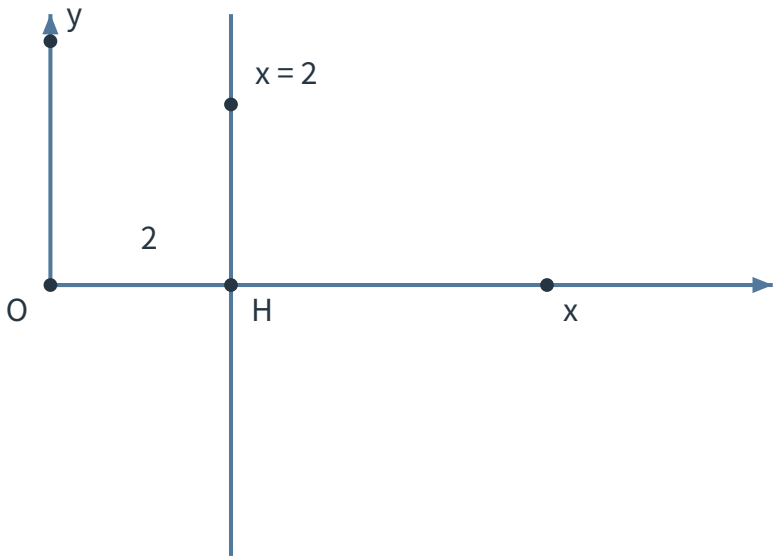

図 4　極方程式 $r\cos\theta = 2$ は直線 $x = 2$ を表す

例題 4：円を極方程式へ直す

円 $x^2 + y^2 = 6y$ を極方程式へ直し、中心と半径を答えよ。

例題 4 の解答・解説

$x^2 + y^2 = r^2$、$y = r\sin\theta$ を代入すると、

$$r^2 = 6r\sin\theta$$

となる。もとの円は $(0, 0)$ を通るので極を含む。極以外では $r > 0$ であり、r で割って

$$r = 6\sin\theta$$

を得る。極についても、たとえば $\theta = 0$ なら $r = 0$ となるため、この極方程式に含まれる。よって求める極方程式は $r = 6\sin\theta$ である。
直交座標の式を平方完成すると、

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

であるから、中心 $(0, 3)$、半径 3 の円である。

4. 同じ図形を表す式か確かめる

変形だけでなく、両方向を確かめる

2 つの方程式が同じ図形を表すというためには、一方を満たす点が他方も満たし、その逆も成り立つ必要がある。極座標では同じ点が複数の偏角で表され、極では偏角が定まらない。そのため、次の順で確かめると安全である。

1. $r > 0$ の点では変換公式を使って両方向を確かめる。
2. $r = 0$、すなわち極をそれぞれの式が含むかを確かめる。
3. $r \geq 0$ や偏角の範囲を確認する。
4. θ と $\theta + 2k\pi$ が同じ向きを表す周期性を保つ。

例題 5：角の周期を含めて読む

極方程式 $\sin\theta = 0$ が表す図形を答えよ。ただし $r \geq 0$ とし、θ はすべての実数を動くものとする。

例題 5 の解答・解説

$\sin\theta = 0$ より $\theta = k\pi$（k は整数）である。偶数 k では x 軸の正の向き、奇数 k では負の向きになる。$r \geq 0$ で両方の半直線が現れるため、表す図形は x 軸全体である。
また、$y = r\sin\theta$ なので、条件を満たす点では $y = 0$ となる。逆に x 軸上の各点は、正の側なら $\theta = 0$、負の側なら $\theta = \pi$、極なら $r = 0$ と適切な偏角を選べるので、すべて原式で表せる。

5. 演習

演習 1：円と半直線

次の極方程式が表す図形を答えよ。ただし $r \geq 0$ とする。
(1) $r = 4$
(2) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

演習 2：極方程式から円へ

極方程式 $r = 8\cos\theta$ を直交座標の方程式へ直し、中心と半径を求めよ。

演習 3：y 軸上に中心をもつ円

極方程式 $r = -4\sin\theta$ を直交座標の方程式へ直し、表す図形を答えよ。

演習 4：直線の極方程式

次の直線を極方程式へ直せ。ただし $r \geq 0$ とする。
(1) $y = 3$
(2) $y = x$

演習 5：極の扱い

方程式 $r^2 = 2r\cos\theta$ が表す図形を求めよ。r で割る前後で極がどう扱われるかも説明せよ。

演習 6：同値性を確かめる

極方程式 $r = 2\sin\theta$ と直交座標の方程式 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ が同じ図形を表すことを、極以外の点と極に分けて示せ。

©ミライコーチング

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) 極からの距離が 4 である点全体なので、極を中心とする半径 4 の円である。
(2) 始線から時計回りに $\frac{\pi}{3}$ の向きへ伸びる、極を端点とする半直線である。

演習 2 の解答・解説

両辺へ r を掛けて、

$$r^2 = 8r\cos\theta$$

とする。よって $x^2 + y^2 = 8x$ であり、平方完成すると

$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

となる。中心 $(4, 0)$、半径 4 の円である。極は原式でも $\cos\theta = 0$ となる偏角を選べば含まれ、円も極を通る。

演習 3 の解答・解説

両辺へ r を掛けると、

$$r^2 = -4r\sin\theta$$

となる。したがって $x^2 + y^2 = -4y$ である。平方完成すると、

$$x^2 + (y+2)^2 = 4$$

となる。よって中心 $(0, -2)$、半径 2 の円である。極は原式と円のどちらにも含まれる。

演習 4 の解答・解説

(1) $y = r\sin\theta$ より、$r\sin\theta = 3$ である。
(2) $y = x$ へ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を代入すると、

$$r\sin\theta = r\cos\theta$$

となる。極以外では $r > 0$ なので $\sin\theta = \cos\theta$、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$（$k$ は整数）である。極も直線に含まれる。したがって、$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ と表せる。$\theta = \frac{\pi}{4}$ だけでは、$r \geq 0$ の下で第 1 象限側の半直線しか表さない。

演習 5 の解答・解説

$r^2 = 2r\cos\theta$ から $x^2 + y^2 = 2x$ を得る。平方完成すると、

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

である。したがって、中心 $(1, 0)$、半径 1 の円である。
$r > 0$ の場合に限れば r で割って $r = 2\cos\theta$ とできる。しかし、もとの式では $r = 0$ のとき両辺が 0 となるので、偏角に関係なく極を含む。割った後の式でも $\cos\theta = 0$ となる偏角を選べば $r = 0$ が得られるため、この場合は点集合として極を失わない。ただし、それは確認して初めていえることである。

演習 6 の解答・解説

極以外では $r > 0$ である。$r = 2\sin\theta$ の両辺へ r を掛けると、

$$r^2 = 2r\sin\theta$$

となる。よって $x^2 + y^2 = 2y$、すなわち

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

である。
逆に、極以外の点が $x^2 + (y-1)^2 = 1$ を満たすとする。すると $x^2 + y^2 = 2y$ より $r^2 = 2r\sin\theta$ であり、$r > 0$ で割れば $r = 2\sin\theta$ を得る。
極 $(0, 0)$ は直交座標の円を満たす。極方程式でも、たとえば $\theta = 0$ とすれば $r = 0 = 2\sin 0$ となる。したがって極も両方に含まれ、2 式は同じ点集合を表す。