

第 104 講 単位円と三角関数

学習目標

- 単位円上の点 $P(x, y)$ から、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を座標として読み取れる。
- $x \neq 0$ のとき、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ として正接を求められる。
- 点 P のある象限から、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ の符号を判断できる。
- 0 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 π 、 $\frac{3\pi}{2}$ の三角関数の値を単位円から読み取れる。
- $x = 0$ のときに $\tan \theta$ が定義されない理由を説明できる。
- $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ の基本的な三角関数の値を単位円上の座標と結び付けられる。

1. 単位円で角を座標に変える

単位円

中心が原点 O 、半径が 1 の円を **単位円** という。単位円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$ である。
正の x 軸を始線として角 θ をとり、その終辺と単位円との交点を $P(x, y)$ とする。この点 P の座標を使って三角関数を考える。

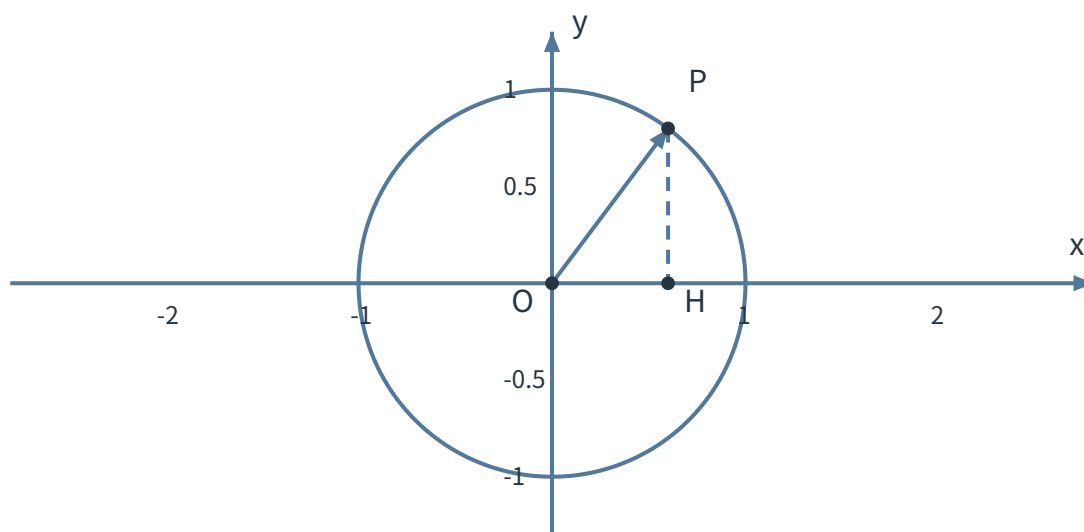


図 1 第 1 象限の点 $P=(3/5, 4/5)$ と x 軸への射影 $H=(3/5, 0)$

単位円上の座標と三角関数

角 θ の終辺と単位円との交点を $P(x, y)$ とすると、

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

と定める。

さらに $x \neq 0$ のとき、

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

と定める。

つまり、余弦は点 P の x 座標、正弦は y 座標、正接は y 座標を x 座標で割った値である。

座標をそのまま読む

上の図では $P = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ である。したがって、 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ である。

また、 $x = \frac{3}{5} \neq 0$ なので、

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

である。

単位円では、三角関数の値を角から直接計算する前に、**終辺が円のどの点を通るかを見る**ことが基本となる。

単位円を見る順序

点 $P(x, y)$ が分かっているときは、次の順に読むとよい。

1. x 座標を見て $\cos \theta = x$ とする。
2. y 座標を見て $\sin \theta = y$ とする。
3. $x \neq 0$ なら $\tan \theta = \frac{y}{x}$ を計算する。
4. $x = 0$ なら、正接は計算せず「定義されない」と判断する。

2. 象限を見ると符号が分かる

第2象限では x が負、 y が正である

単位円の第2象限にある点では、 $x < 0$ 、 $y > 0$ である。

したがって、第2象限の角では $\cos \theta < 0$ 、 $\sin \theta > 0$ となる。また、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ では正の数を負の数で割るため、 $\tan \theta < 0$ である。

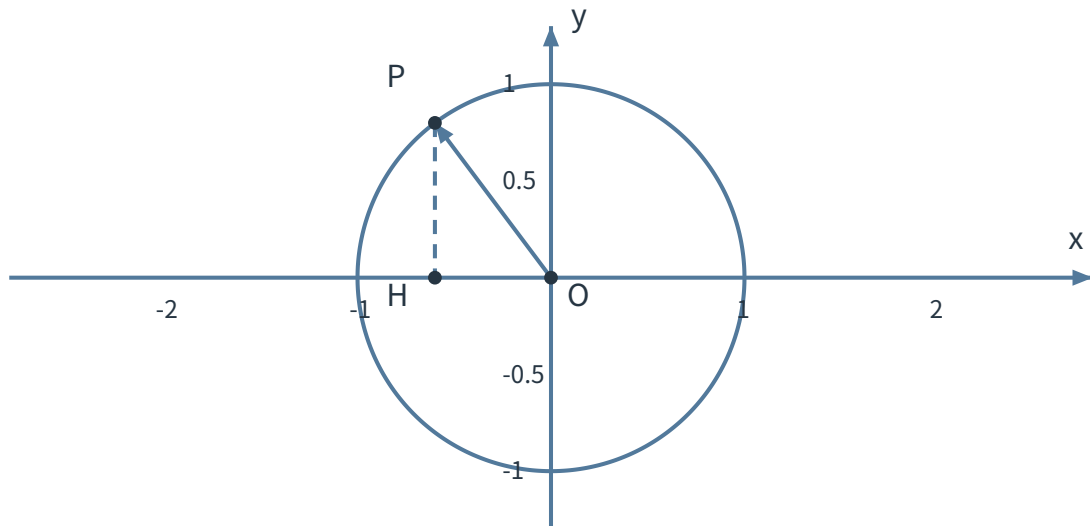


図2 第2象限ではx座標が負、y座標が正である

下半円ではy座標が負になる

第3象限と第4象限では、どちらも $y < 0$ なので $\sin \theta < 0$ である。

第3象限では $x < 0$ でもあるため、 $\cos \theta < 0$ 、 $\tan \theta > 0$ となる。一方、第4象限では $x > 0$ なので、 $\cos \theta > 0$ 、 $\tan \theta < 0$ となる。

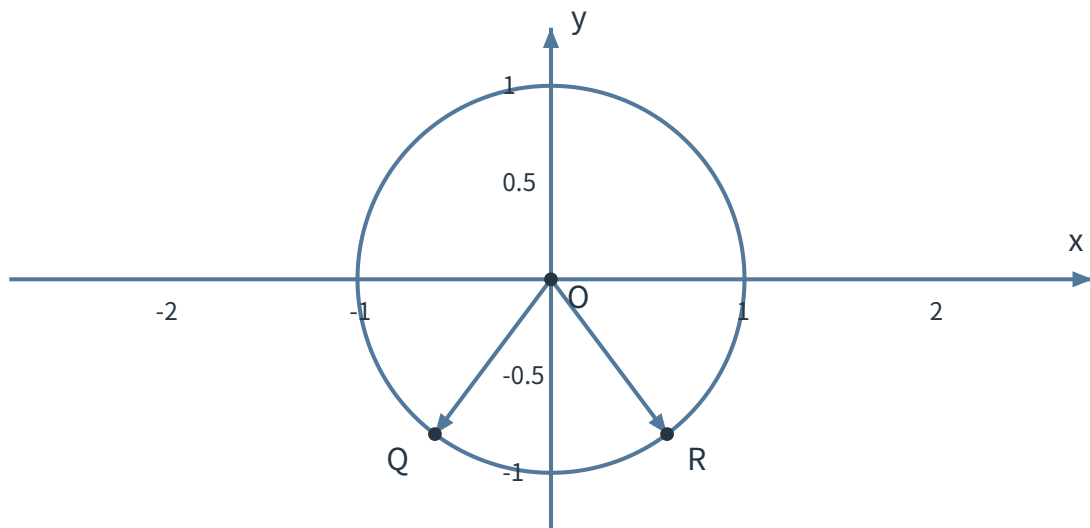


図3 下半円の第3象限と第4象限では、どちらもy座標が負である

各象限での符号

単位円上の点 $P(x, y)$ の座標を見ると、符号は次のようになる。

象限	$x = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$
第 1 象限	正	正	正
第 2 象限	負	正	負
第 3 象限	負	負	正
第 4 象限	正	負	負

この表を丸暗記するより、点 P の x 座標と y 座標の符号を見て判断の方が再現しやすい。

3. 軸上の角では何が起こるか

4 つの軸上の点を読む

単位円と座標軸との交点は、 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, -1)$ の 4 点である。
これらはそれぞれ、角 0 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 π 、 $\frac{3\pi}{2}$ の終辺に対応する。座標をそのまま読むことで、正弦と余弦の値が分かる。

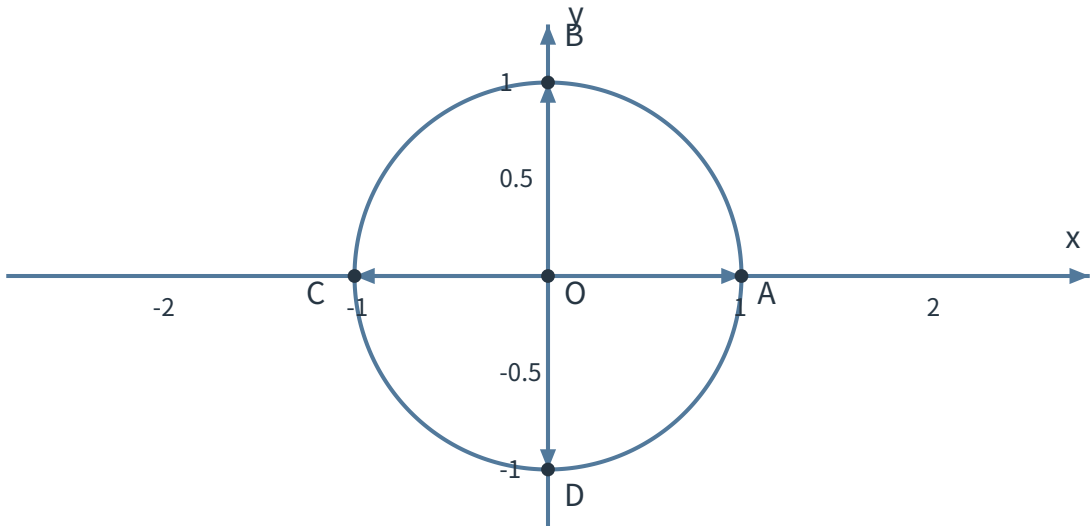


図 4 単位円と座標軸の 4 つの交点

θ	点 $P(x, y)$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
0	$(1, 0)$	1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	0	1	定義されない
π	$(-1, 0)$	-1	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$(0, -1)$	0	-1	定義されない

なぜ $x=0$ では正接が定義されないのか

正接は $x \neq 0$ のとき $\tan \theta = \frac{y}{x}$ で定める。
 $\theta = \frac{\pi}{2}$ では点 $P = (0, 1)$ なので、もし式へ代入しようとするとなりとなりとなる。しかし、0で割ることはできない。
同様に、 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ では $\frac{-1}{0}$ となるため、やはり正接は定義されない。

x=0 のとき tan を 0 にしない

$\cos \theta = 0$ だからといって、 $\tan \theta$ まで0になるわけではない。

正接は $\frac{y}{x}$ で決まるため、分母 x が0なら値そのものが定義されない。軸上の角では、点の座標を確認してから正接を判断する必要がある。

4. 代表的な角を単位円上の座標として覚える **$\frac{\pi}{6}$ と $\frac{\pi}{3}$ の座標**

$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ 、 $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ である。

30° 、 60° 、 90° の直角三角形で斜辺を1とすると、短い辺は $\frac{1}{2}$ 、長い辺は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

したがって、第1象限では $\theta = \frac{\pi}{6}$ の終辺と単位円との交点は $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ では $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ である。

 $\frac{\pi}{4}$ の座標

$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ である。

45° 、 45° 、 90° の直角三角形で斜辺を1とすると、2本の直角をはさむ辺はどちらも $\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

したがって、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ の終辺と単位円との交点は $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ である。

第1象限の代表角

- $\theta = \frac{\pi}{6}$: $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。
- $\theta = \frac{\pi}{4}$: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\tan \theta = 1$ 。
- $\theta = \frac{\pi}{3}$: $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 。

数値を別々に暗記するより、単位円上の点の x 座標と y 座標として覚えるとよい。

5. 例題**例題 1：座標から三角関数の値を読む**

角 θ の終辺と単位円との交点が $P(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ である。 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

単位円上の点 $P(x, y)$ では、 $\cos \theta = x$ 、 $\sin \theta = y$ である。

したがって、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ である。

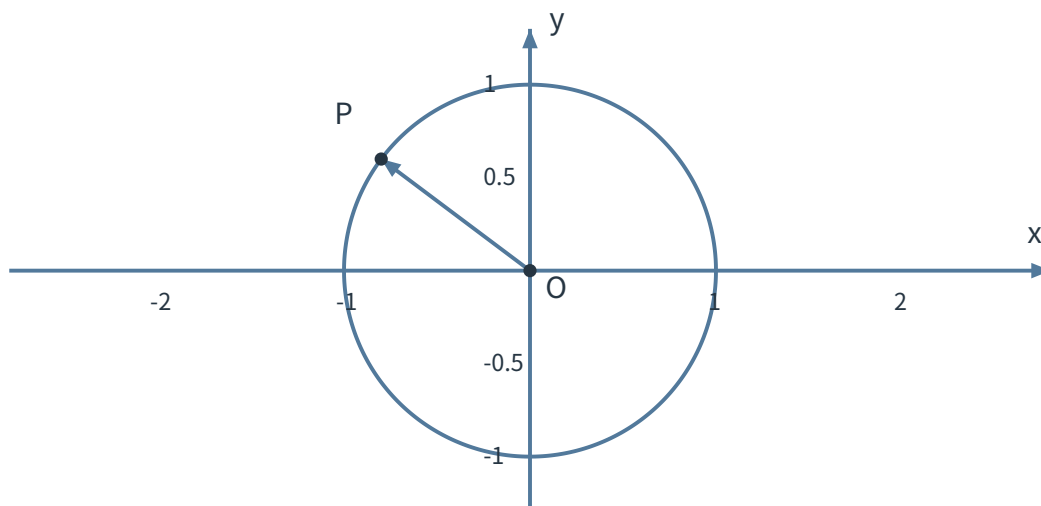
また、 $x = \frac{4}{5} \neq 0$ なので、

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

である。

例題 2：第2象限の点から読む

次の図で、角 θ の終辺と単位円との交点は $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ である。 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

図 5 第 2 象限の点 $P=(-4/5, 3/5)$ **例題 2 の解答・解説**

点 P の x 座標は $-\frac{4}{5}$ 、 y 座標は $\frac{3}{5}$ である。
したがって、 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ である。
さらに、

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

である。
第 2 象限では余弦が負、正弦が正、正接が負になることとも一致する。

例題 3：軸上の角

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求め、 $\tan \theta$ が定義されるか答えよ。

例題 3 の解答・解説

$\theta = \frac{\pi}{2}$ の終辺は正の y 軸であり、単位円との交点は $P = (0, 1)$ である。
したがって、 $\cos \theta = 0$ 、 $\sin \theta = 1$ である。
正接は $\frac{y}{x}$ であるが、ここでは $x = 0$ なので 0 で割ることになる。よって、 $\tan \theta$ は定義されない。

例題 4：代表角の値

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ である。斜辺を1とする 30° 、 60° 、 90° の直角三角形から、単位円上の点は $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

したがって、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また、

$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

である。

6. 演習問題

演習 1：座標から値を読む

角 θ の終辺と単位円との交点が $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ である。 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

演習 2：象限から符号を判断する

角 θ の終辺が次の象限にあるとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ の符号をそれぞれ答えよ。

- (1) 第 1 象限
- (2) 第 3 象限
- (3) 第 4 象限

演習 3：軸上の基本角

次の角について、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。正接が定義されない場合は、そのように答えよ。

- (1) $\theta = 0$
- (2) $\theta = \pi$
- (3) $\theta = \frac{3\pi}{2}$

演習 4： $\frac{\pi}{6}$ の値

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

演習 5： $\frac{\pi}{4}$ の値

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

演習 6：三角関数の値から点を決める

角 θ の終辺と単位円との交点を $P(x, y)$ とする。 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 、 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 P は第何象限にあるか。
- (3) $\tan \theta$ を求めよ。

演習 7：正接が定義されるか

次の各点が角 θ の終辺と単位円との交点 P であるとき、 $\tan \theta$ が定義されるか答えよ。定義される場合は値も求めよ。

- (1) $P = (0, -1)$
- (2) $P = (-1, 0)$
- (3) $P = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

演習 8：下半円の点を読む

次の図で、角 θ の終辺と単位円との交点は $P(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ である。 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

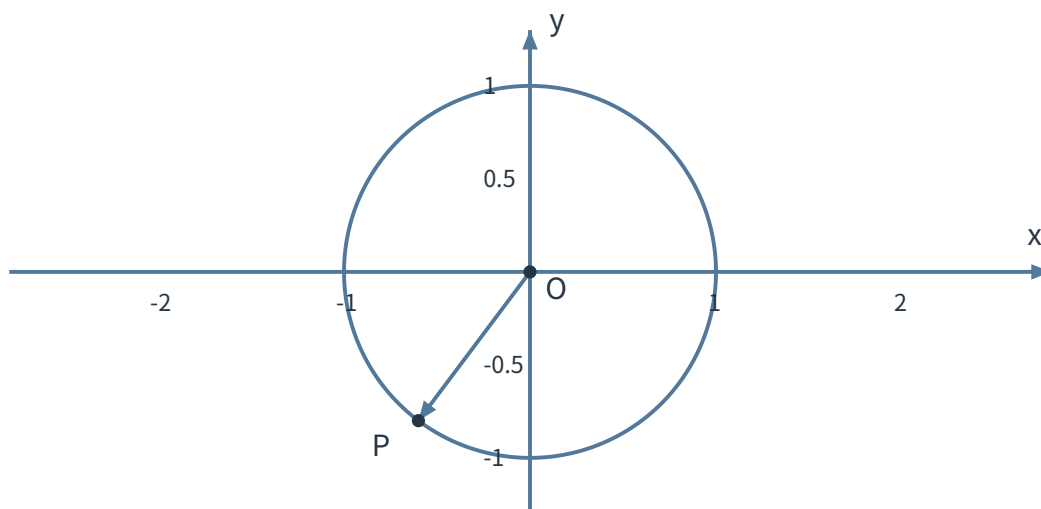


図 6 第 3 象限の点 $P = (-3/5, -4/5)$

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

点 P の x 座標と y 座標を読むと、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ である。
また、

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

である。

演習 2 の解答・解説

- (1) 第 1 象限では $x > 0$ 、 $y > 0$ である。したがって、 $\cos \theta$ は正、 $\sin \theta$ は正、 $\tan \theta$ も正である。
- (2) 第 3 象限では $x < 0$ 、 $y < 0$ である。したがって、 $\cos \theta$ は負、 $\sin \theta$ は負である。 $\frac{y}{x}$ は負を負で割るので、 $\tan \theta$ は正である。
- (3) 第 4 象限では $x > 0$ 、 $y < 0$ である。したがって、 $\cos \theta$ は正、 $\sin \theta$ は負、 $\tan \theta$ は負である。

演習 3 の解答・解説

- (1) $\theta = 0$ では $P = (1, 0)$ である。したがって、 $\cos \theta = 1$ 、 $\sin \theta = 0$ 、 $\tan \theta = 0$ である。
- (2) $\theta = \pi$ では $P = (-1, 0)$ である。したがって、 $\cos \theta = -1$ 、 $\sin \theta = 0$ 、 $\tan \theta = 0$ である。
- (3) $\theta = \frac{3\pi}{2}$ では $P = (0, -1)$ である。したがって、 $\cos \theta = 0$ 、 $\sin \theta = -1$ である。 $x = 0$ なので、 $\tan \theta$ は定義されない。

演習 4 の解答・解説

$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ である。斜辺を 1 とする 30° 、 60° 、 90° の直角三角形から、単位円上の点は $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

したがって、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ である。

また、

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。

演習 5 の解答・解説

$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ である。斜辺を 1 とする 45° 、 45° 、 90° の直角三角形から、単位円上の点は $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

したがって、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

また、

$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

である。

演習 6 の解答・解説

(1) $\cos \theta = x$ 、 $\sin \theta = y$ なので、 $P = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ である。

(2) $x < 0$ 、 $y < 0$ なので、点 P は第 3 象限にある。

(3)

$$\tan \theta = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

である。

演習 7 の解答・解説

(1) $P = (0, -1)$ では $x = 0$ なので、 $\tan \theta$ は定義されない。

(2) $P = (-1, 0)$ では $x = -1 \neq 0$ なので、 $\tan \theta = \frac{0}{-1} = 0$ である。

(3) $P = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ では $x = \frac{3}{5} \neq 0$ なので、

$$\tan \theta = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

である。

演習 8 の解答・解説

点 P の x 座標は $-\frac{3}{5}$ 、 y 座標は $-\frac{4}{5}$ である。

したがって、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 、 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ である。

また、

$$\tan \theta = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

である。

第 3 象限では余弦と正弦はともに負であるが、正接は正になる。