

第 141 講 等比数列

この講でできるようになること

等比数列の意味を理解し、隣り合う項の比から等比数列かどうかを判断できるようになる。
初項と公比から一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ を求め、第 n 項を計算できるようになる。
公比が負の場合に符号が交互に変化する理由を説明できるようになる。

一定倍率で次の項を作る

数列を見ると、項どうしの関係に注目すると規則を見つけやすい。
例えば、2, 6, 18, 54, ... という数列では、最初の項 2 に 3 を掛けると 6 になり、さらに 3 を掛けると 18、さらに 3 を掛けると 54 になる。
このように、ある項から次の項を作るとき、毎回同じ倍率を掛ける数列を考える。
ただし、有限個の項だけを見て、その後の数列が必ず一意に決まるわけではない。2, 6, 18, 54 だけが与えられた場合でも、続きは別の規則で作ることもできる。本講では「最初の項から以後 3 倍して続ける」と定めた数列として扱う。

等比数列の定義

数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を考える。番号 n は 1 から始まる正整数であり、各項 a_n は実数とする。
全ての n について $a_n \neq 0$ であるとき、隣り合う項の比を考えることができる。
全ての正整数 n で、 $a_{n+1} \div a_n = r$ となる一定の実数 r が存在するとき、この数列を等比数列という。
この一定の比 r を公比という。
この関係は、 $a_{n+1} = r a_n$ とも表せる。
本講では、比による定義を安全に扱うため、初項 $a_1 \neq 0$ 、公比 $r \neq 0$ の等比数列を扱う。
公比は正の数だけではなく、負の数、分数、1 も可能である。

等比数列を見るポイント

等比数列かどうかを判断するときは、「一定倍率で次の項を作れるか」を見る。
ただし、初めの数項だけを見て、その後の全ての項が等比数列になると断定してはいけない。
例えば、最初の 4 項が 3, 6, 12, 24 であったとしても、続き方を指定しなければ、その 4 項だけから数列全体が決まるわけではない。
本講では「最初が 3 で、以後 2 倍して続ける」と定めた数列を考える。このとき一般項は、 $A_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ である。
全ての正整数 n について確認すると、

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2$$

となるため、公比は 2 である。
一方、1, 2, 4, 7 が最初の 4 項として与えられた場合、隣り合う比を見ると、 $2 \div 1 = 2$ 、 $4 \div 2 = 2$ 、 $7 \div 4 = \frac{7}{4}$ となり、すでに比が一定ではない。
したがって、この 4 項を持つ数列は、続き方によらず等比数列ではない。

一般項を作る理由

初項 a_1 から第 n 項まで進むとき、次の項へ移る操作を何回行うかを考える。

第 2 項では 1 回、第 3 項では 2 回、第 4 項では 3 回、公比を掛ける。

したがって、第 n 項では公比を $n - 1$ 回掛けることになる。

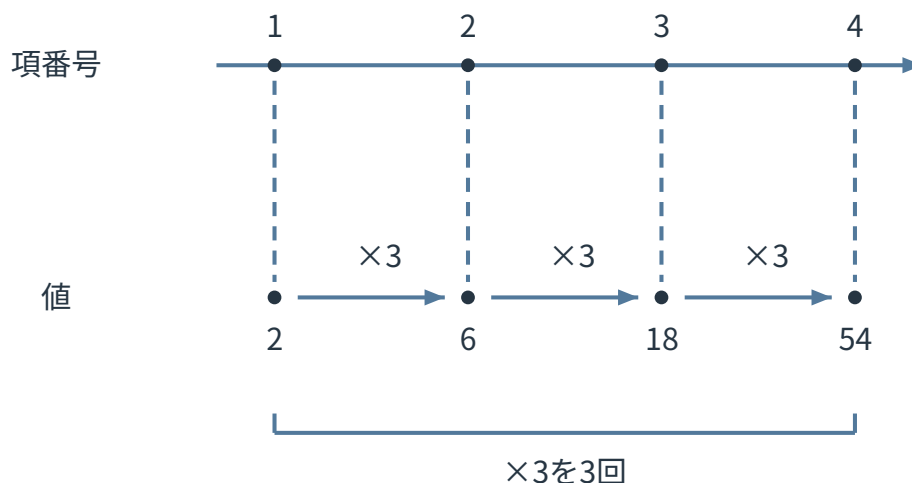


図1 上段は項番号の数直線、下段は対応する値の一覧であり、値の大小を距離で表さない。初項 2 に公比 3 を掛け、第 1 項から第 4 項までは 3 回掛ける。

この考えから、等比数列の一般項は次のようになる。

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$n = 1$ のときは $r^0 = 1$ なので、 $a_1 r^0 = a_1$ となり、初項に戻る。

公比が負の場合は、掛けるたびに符号が変わる。例えば公比が -2 なら、正負が交互に現れるが、公比自体は常に -2 で一定である。

よくある誤り

0 を含む数列では、隣り合う項の比を使うと分母が 0 になる場合がある。

例えば $0, 0, 0, \dots$ では $0 \div 0$ は定義されないため、比による定義をそのまま使えない。

また、一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ を使うときも、 0^0 のような未定義の形を作らないように、初項や公比の条件を確認する必要がある。

公比の符号と増減

公比 r が正でも、数列が必ず増加するとは限らない。

例えば、初項が -2 、公比が 4 の数列では、 $-2, -8, -32, \dots$ となる。

公比は正であるが、項の値は小さくなっていく。

また、初項が 8 、公比が $\frac{1}{2}$ の数列では、 $8, 4, 2, \dots$ となる。

このように、公比が正でも、公比の大きさや初項の符号によって変化の様子は異なる。

一方、正の公比では、各項の符号は変わらない。

負の公比では、非零の項に対して毎回負の数を掛けるため、符号が交互に変化する。

例えば公比が -2 なら、 $3, -6, 12, -24, \dots$ のようになる。

公比が1の場合は、 $a_n = a_1$ となり、全ての項が初項と同じ値になる。

例題 1

初項が 2、公比が 3 の等比数列について、一般項と第 5 項を求めよ。

例題 1 の解説

初項は $a_1 = 2$ 、公比は $r = 3$ である。
等比数列の一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ に代入する。

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

したがって、一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ である。
第 5 項は $n = 5$ を代入する。

$$\begin{aligned} a_5 &= 2 \cdot 3^{5-1} \\ &= 2 \cdot 3^4 \\ &= 2 \cdot 81 \\ &= 162 \end{aligned}$$

元の条件を確認すると、2から順に 3 倍すると 6, 18, 54, 162 となり、第 5 項は 162 で一致する。

例題 2

初項が 3、公比が -2 の等比数列について、初めの 4 項と第 6 項を求めよ。また、符号が交互になる理由を説明せよ。

例題 2 の解説

初項は $a_1 = 3$ 、公比は $r = -2$ である。
次の項を作るたびに -2 を掛ける。
 $3, -6, 12, -24, \dots$ となる。
符号が交互になるのは、負の数である公比 -2 を毎回掛けるためである。正の項に -2 を掛けると負になり、負の項に -2 を掛けると正になる。
第 6 項は一般項を使う。

$$\begin{aligned} a_6 &= 3(-2)^{6-1} \\ &= 3(-2)^5 \\ &= 3(-32) \\ &= -96 \end{aligned}$$

元の条件から確認すると、第 5 項は 48、第 6 項は $48 \times (-2) = -96$ となり一致する。

例題 3

等比数列の第 3 項が 12、第 4 項が 24 であるとき、初項、公比、一般項、第 6 項を求めよ。

例題 3 の解説

第 3 項と第 4 項の比から公比を求める。

第 4 項は第 3 項に公比を掛けたものなので、 $a_4 = a_3 r$ である。

条件より、 $24 = 12r$

したがって、 $r = 2$ となる。

第 3 項は、初項から公比を 2 回掛けたものなので、 $a_3 = a_1 r^2$ である。

これに $a_3 = 12$ 、 $r = 2$ を代入する。

$$12 = a_1 \cdot 2^2$$

$$12 = 4a_1$$

$$a_1 = 3$$

よって、初項は 3、公比は 2 である。

一般項は、 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ となる。

第 6 項は、

$$a_6 = 3 \cdot 2^{6-1}$$

$$= 3 \cdot 2^5$$

$$= 96$$

元の条件を確認すると、第 3 項は $3 \cdot 2^2 = 12$ 、第 4 項は $3 \cdot 2^3 = 24$ となり、条件と一致する。

演習問題

練習問題 1

初項が 4、公比が 3 の等比数列について、一般項と第 6 項を求めよ。

練習問題 2

初項が 5、公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列について、初めの 5 項と第 8 項を求めよ。
また、符号がどのように変化するかを説明せよ。

練習問題 3

初項が -2 、公比が 4 の等比数列について、一般項と第 5 項を求めよ。

練習問題 4

公比が 1 で、初項が 7 の等比数列について、一般項と第 10 項を求めよ。
また、すべての項の比が一定になることを確認せよ。

練習問題 5

ある等比数列で、第 3 項が 18、第 4 項が 6 である。
初項、公比、一般項、第 6 項を求めよ。

練習問題 6

全ての正整数 n について、 $a_n = 3(-2)^{n-1}$ と定める数列が等比数列であるかを判断し、公比を求めよ。また、初めの4項を用いて確認せよ。

練習問題 7

次の2つの数列について、それぞれの規則を説明し、等差数列と等比数列のどちらであるかを判断せよ。

A：最初の項を2とし、以後は毎回3を加えて作る数列。

B：最初の項を2とし、以後は毎回3を掛けて作る数列。

練習問題 8

等比数列の一般項について、初項を a_1 、公比を r とする。

第 n 項を求めるとき、公比を掛ける回数が $n - 1$ 回になる理由を説明し、一般項を示せ。

また、 $n = 1$ のときに初項へ戻ることを確認せよ。

練習問題 1 の解説

初項は $a_1 = 4$ 、公比は $r = 3$ である。

等比数列の一般項は、初項から第 n 項までに公比を $n - 1$ 回掛けることから、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ で表される。

したがって、 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ である。

第6項は、

$$\begin{aligned} a_6 &= 4 \cdot 3^{6-1} \\ &= 4 \cdot 3^5 \\ &= 4 \cdot 243 \\ &= 972 \end{aligned}$$

となる。

元の条件を確認すると、4, 12, 36, 108, 324, 972 となり、各項は前の項を3倍して得られるため、公比は3で一致する。

練習問題 2 の解説

初項は $a_1 = 5$ 、公比は $r = -\frac{1}{2}$ である。
前の項に $-\frac{1}{2}$ を掛ける。

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 5 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{2}$$

$$a_3 = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$$

$$a_4 = \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{8}$$

$$a_5 = -\frac{5}{8} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{16}$$

したがって、初めの 5 項は $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{16}$ である。
第 8 項は、

$$\begin{aligned} a_8 &= 5 \left(-\frac{1}{2} \right)^{8-1} \\ &= 5 \left(-\frac{1}{2} \right)^7 \\ &= -\frac{5}{128} \end{aligned}$$

である。

公比が負なので、掛けるたびに符号が反転する。奇数番目の項は正、偶数番目の項は負になる。
元の条件でも、各項に $-\frac{1}{2}$ を掛けることで次の項になるため、公比は一定である。

練習問題 3 の解説

初項は $a_1 = -2$ 、公比は $r = 4$ である。
一般項は、 $a_n = -2 \cdot 4^{n-1}$ となる。
第 5 項は、

$$\begin{aligned} a_5 &= -2 \cdot 4^{5-1} \\ &= -2 \cdot 4^4 \\ &= -2 \cdot 256 \\ &= -512 \end{aligned}$$

である。

負の初項でも、公比が正なら符号は変化しない。

元の条件を確認すると、 $-2, -8, -32, -128, -512$ となり、各項を 4 倍して次の項になる。

練習問題 4 の解説

初項は $a_1 = 7$ 、公比は $r = 1$ である。

一般項は、 $a_n = 7 \cdot 1^{n-1}$ である。

1 を何回掛けても値は変わらないので、 $a_n = 7$ となる。

第 10 項は、 $a_{10} = 7 \cdot 1^9 = 7$ である。

元の数列は、 $7, 7, 7, 7, \dots$ となる。

隣り合う項の比は、 $7 \div 7 = 1$ であり、すべての項で同じ比になる。

練習問題 5 の解説

第 3 項と第 4 項が分かっている。

第 4 項は第 3 項に公比を掛けたものなので、 $a_4 = a_3 r$ である。

条件を代入すると、 $6 = 18r$

よって、

$$r = \frac{1}{3}$$

となる。

次に、第 3 項から初項を求める。

第 3 項は初項に公比を 2 回掛けたものなので、 $a_3 = a_1 r^2$ である。

したがって、

$$18 = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$18 = \frac{a_1}{9}$$

$$a_1 = 162$$

よって、初項は 162、公比は $\frac{1}{3}$ である。

一般項は、

$$a_n = 162 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる。

第 6 項は、

$$a_6 = 162 \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$= 162 \cdot \frac{1}{243}$$

$$= \frac{2}{3}$$

である。

元の条件を確認すると、

第 3 項は $162 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 18$ 、第 4 項は $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ となり一致する。

練習問題 6 の解説

与えられた一般項から、第 $n+1$ 項を考える。

$$a_{n+1} = 3(-2)^n$$

したがって、隣り合う項の比は、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(-2)^n}{3(-2)^{n-1}}$$

である。

初項は 3 であり、 -2 のべきはどの正整数 n でも 0 にならないため、全ての項で $a_n \neq 0$ である。

よって比は定義できる。

指数法則より、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$$

となる。

全ての正整数 n で比が一定の -2 になるため、この数列は等比数列であり、公比は -2 である。

初めの 4 項を確認すると、 $a_1 = 3$ 、 $a_2 = 3(-2) = -6$ 、 $a_3 = 3(-2)^2 = 12$ 、 $a_4 = 3(-2)^3 = -24$ となる。

実際に、 $-6 \div 3 = -2$ 、 $12 \div (-6) = -2$ 、 $-24 \div 12 = -2$ であり、一般項から求めた公比と一致する。

練習問題 7 の解説

A の数列は、最初の項が 2 で、毎回 3 を加える。

したがって、最初の 4 項は、2, 5, 8, 11 となる。

隣り合う項の差を確認すると、 $5 - 2 = 3$ 、 $8 - 5 = 3$ 、 $11 - 8 = 3$ である。

また、第 n 項は、 $A_n = 3n - 1$ と表せる。

実際に、 $A_{n+1} - A_n = (3(n+1) - 1) - (3n - 1) = 3$ となり、全ての正整数 n で差が一定である。

したがって、A は等差数列である。

B の数列は、最初の項が 2 で、毎回 3 を掛ける。

したがって、最初の 4 項は、2, 6, 18, 54 となる。

隣り合う項の比を確認すると、 $6 \div 2 = 3$ 、 $18 \div 6 = 3$ 、 $54 \div 18 = 3$ である。

また、第 n 項は、 $B_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ と表せる。

全ての正整数 n について、

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} = 3$$

となるため、比は一定である。

したがって、B は等比数列である。

等差数列は「一定の数を加える数列」、等比数列は「一定倍率を掛ける数列」である。

ただし、等差数列と等比数列は、常にどちらか一方だけになるとは限らない。例えば、7, 7, 7, ... のような全ての項が 7 である非零定数列では、隣り合う項の差は常に 0 なので公差 0 の等差数列であり、隣り合う項の比は常に 1 なので公比 1 の等比数列でもある。このように、同時に等差数列と等比数列になる場合がある。

練習問題 8 の解説

初項 a_1 から順に考える。

第 1 項では、公比を掛ける必要はない。

第 2 項では 1 回掛ける。

第 3 項では 2 回掛ける。

このように、第 n 項では第 1 項から $n - 1$ 回だけ次の項へ進むため、公比を掛ける回数は $n - 1$ 回になる。

したがって、

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

となる。

$n = 1$ の場合は、 $a_1 r^{1-1} = a_1 r^0$ である。

$r \neq 0$ なので $r^0 = 1$ であり、 $a_1 r^0 = a_1$ となる。

したがって、第 1 項では初項に戻ることが確認できる。