第 190 講 指数関数の微分

学習目標

この講では、指数関数の微分の仕組みを理解し、e^x、a^x、合成関数を含む指数関数の導関数を求められるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 自然対数の底 e の意味と自然対数の定義を説明できる。
- 差商の極限から e^x の微分公式を導くことができる。
- a^x の微分公式を e^x との関係から導ける。
- 指数関数の合成関数、積、商の微分を計算できる。

1. 指数関数の微分を可能にする底 e

指数関数の変化率と特別な底

指数関数の差商を考えると、底によって変化率を表す係数が変わる。指数法則によって差商を分解すると、底に固有の極限が係数として現れる構造になる。
次の極限を満たす底$b>1$はただ 1 つ存在する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$$

この極限では、hは0でない実数から0へ近づく両側極限を考える。この存在と一意性を本講の出発点として認め、その底をeと定める。
数値では$e\approx 2.71828$である。
実数xに対して、e^xは実数全域で定義される指数関数である。

自然対数

自然対数は、底を e とする対数である。
$a>0$ に対して、$\log a$ は $e^c=a$ となる実数 c を表し、正式には $\log a=\log_e a$ と書く。
したがって、$\log e=1$、$\log 1=0$ である。
また、実数 x に対して e^x は実数全域で定義された指数関数である。

証明の順序

この講では、自然対数の微分公式を利用して e^x の微分を示すことはしない。
まず e の基本的な極限を出発点として、指数法則と差商から e^x の微分を導く。

2. e^x の微分

差商を指数法則で変形する

関数$f(x)=e^x$について、任意に固定した実数xと$h\neq 0$に対する差商は$\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$である。
指数法則より $e^{x+h}=e^xe^h$ であるから、h に関する部分を分けることができる。
固定した x では e^x は h に依存しない定数として扱える。

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$
$$= e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

したがって、差商の極限は e^x と基本極限の積になる。
基本極限 $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ を用いると、差商には有限の極限が存在する。
よって、$f'(x) = e^x$ である。
つまり、e^x は微分しても自分自身が残る指数関数である。

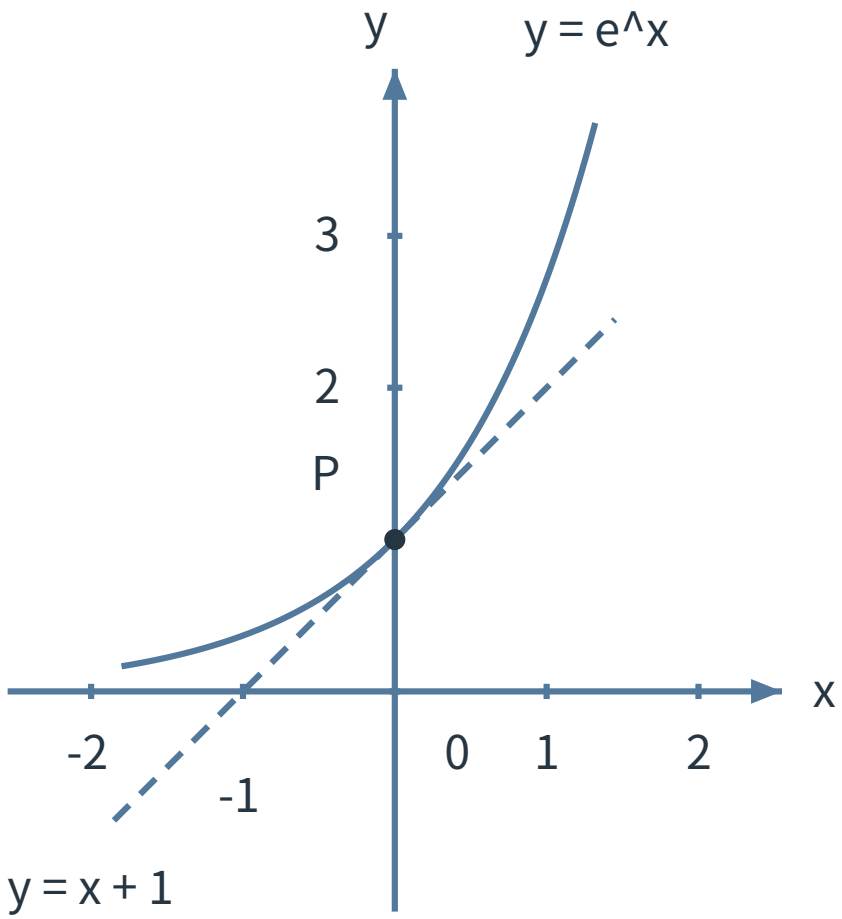

図 1　実線は$y = e^x$のグラフ、破線は点$P(0,1)$での接線である。接線の式は$y = x + 1$であり、接線の傾きは$m = 1$である。

接線の傾きで見る e^x

$y = e^x$ は点 $(0,1)$ を通る。
この点での導関数の値は $e^0 = 1$ であるため、接線の傾きは 1 になる。
したがって、この点での接線は $y = x + 1$ である。

図の有限表示範囲は描画のための範囲であり、指数関数の定義域の端を表すものではない。

3. 一般の指数関数 a^x の微分

一般の底へ広げる

$a > 0$ を定数とする。
$a = 1$ の場合は $a^x = 1$ であり、定数関数なので微分すると 0 になる。
$a \neq 1$ の場合も含めて、指数法則を利用すると a^x は自然対数を用いて $a^x = e^{x \log a}$ と表せる。
ここで、$a > 0$ なので $\log a$ は定義される。

一般底の公式を導く

$a > 0$を定数とする。指数法則と自然対数の定義から、$a^x = e^{x \log a}$と表せる。
ここで$g(x) = x \log a$とおくと、$g'(x) = \log a$である。
合成関数の微分より、$\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} g'(x)$となる。
したがって、$(a^x)' = e^{x \log a} \log a$である。
さらに$e^{x \log a} = a^x$なので、$(a^x)' = a^x \log a$となる。
$a = 1$の場合は$a^x = 1$であり、$\log 1 = 0$だから、公式から得られる値も0となって定数関数の微分と一致する。

指数関数の微分公式

$a > 0$を定数とすると、$(a^x)' = a^x \log a$である。
特にeを底とする場合は$(e^x)' = e^x$である。

増減と底の関係

$a > 1$ のときは $\log a > 0$ なので、a^x の導関数は正になる。
$0 < a < 1$ のときは $\log a < 0$ なので、a^x の導関数は負になる。
$a = 1$ のときは定数関数であり、導関数は 0 である。

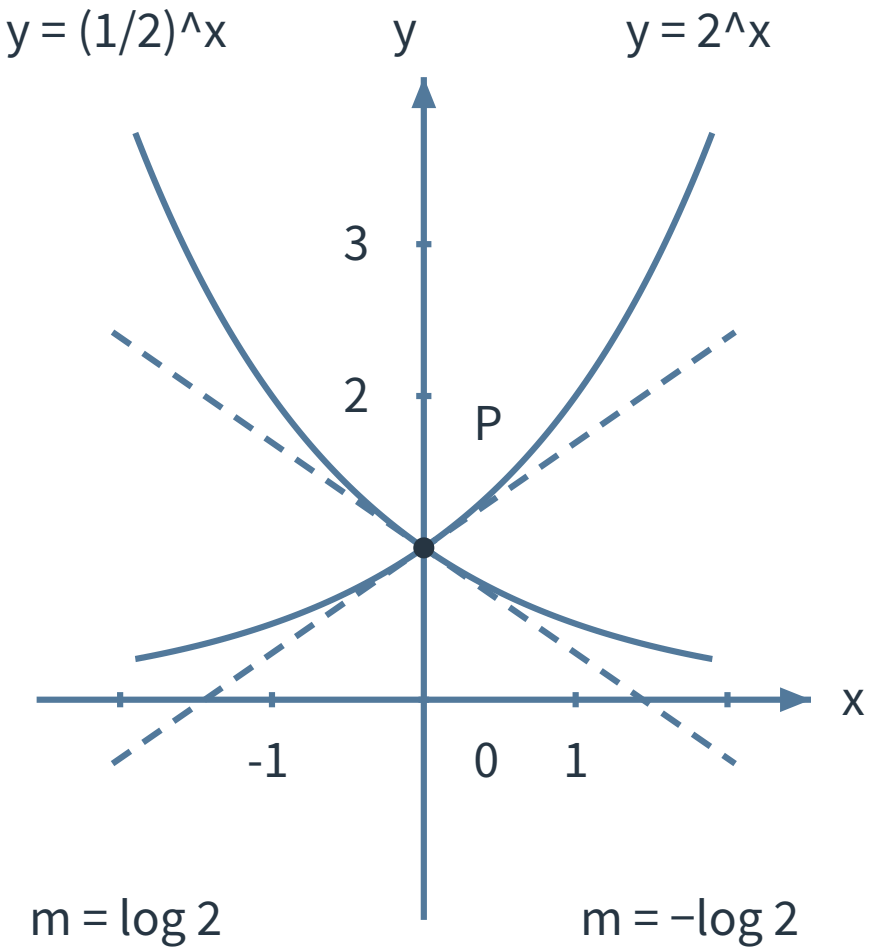

図 2　実線は$y=2^x$と$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$のグラフ、破線はそれぞれの点$P(0,1)$での接線である。$y=2^x$の接線の傾きは$m=\log 2$、$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$の接線の傾きは$m=-\log 2$である。

底による傾きの違い

$y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は、どちらも点 $(0,1)$ を通る。
$y=2^x$ の接線の傾きは $2^0\log 2=\log 2$ で正である。
一方、$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の接線の傾きは $\left(\frac{1}{2}\right)^0\log\left(\frac{1}{2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)$ で負である。
同じ指数関数でも、底によって増加と減少が変化する。

4. 合成された指数関数の微分

指数部分の変化を掛ける

$g(x)$が考える点で微分可能であるとする。
このとき、$e^{g(x)}$ の導関数は、外側の指数関数の変化率と内側の変化率を掛けて求める。
したがって、$\left(e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}g'(x)$である。
また、$a>0$を定数とすると、$\left(a^{g(x)}\right)'=a^{g(x)}\log a\cdot g'(x)$である。

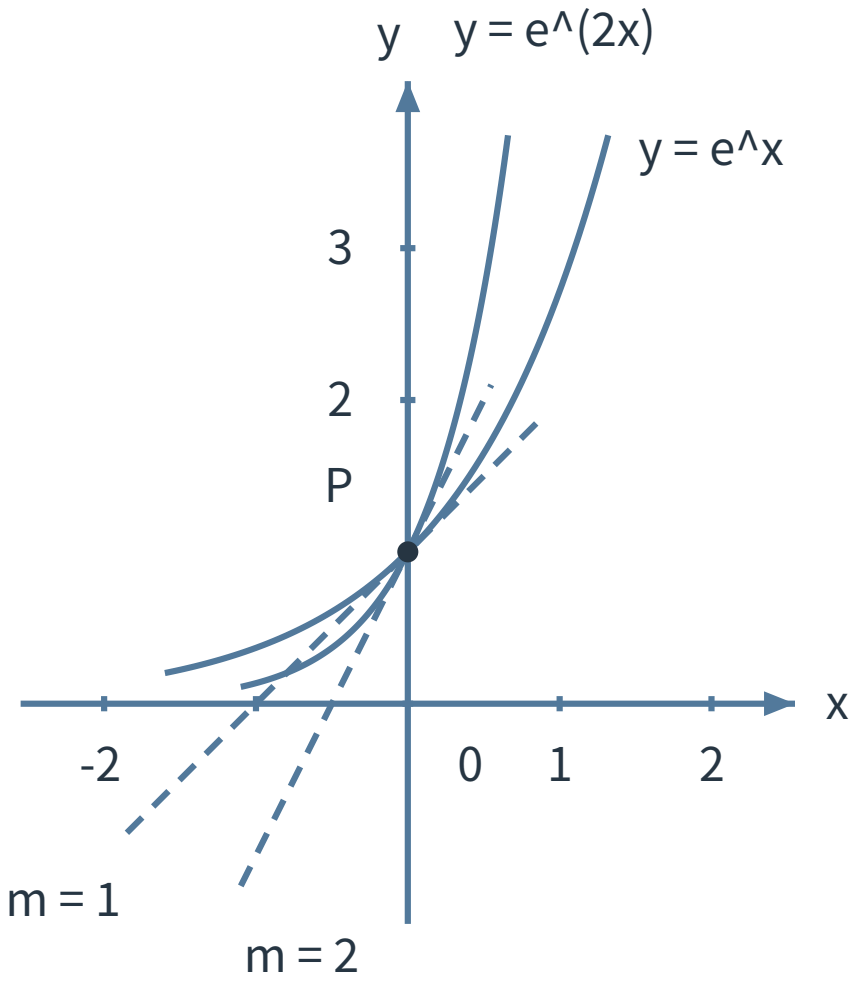

図 3　実線は$y = e^{2x}$と$y = e^{x}$のグラフ、破線はそれぞれの点$P(0,1)$での接線である。$y = e^{2x}$の接線の傾きは$m = 2$、$y = e^{x}$の接線の傾きは$m = 1$である。

指数部分の係数と接線の傾き

$y = e^{2x}$ と $y = e^{x}$ は、どちらも点 $(0,1)$ を通る。
しかし、$y = e^{2x}$ の導関数は $2e^{2x}$ であり、点 $(0,1)$ での傾きは 2 になる。
一方、$y = e^{x}$ の点 $(0,1)$ での傾きは 1 である。
指数部分に係数が付くと、その係数が微分後の変化率に現れる。

5. 例題

例題 1

関数 $y = e^{x}$ を微分しなさい。

例題 1 の解答・解説

e^x の差商を考える。
固定した x では e^x は h に依存しない定数である。
したがって、指数法則を使うと $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h}$ となる。
基本極限 $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ より、差商の極限は e^x になる。
よって、$(e^x)' = e^x$ である。

例題 2

関数 $y = 3^x$ を微分しなさい。

例題 2 の解答・解説

一般の指数関数の微分公式 $(a^x)' = a^x \log a$ を用いる。
ここでは底が $a = 3$ なので、$(3^x)' = 3^x \log 3$ となる。
したがって、導関数は $3^x \log 3$ である。

例題 3

関数 $y = e^{2x+1}$ を微分しなさい。

例題 3 の解答・解説

指数部分を $g(x) = 2x + 1$ とおく。
$g(x)$ の微分は $g'(x) = 2$ である。
$e^{g(x)}$ の微分公式より、$\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} g'(x)$ を使う。
したがって、$\left(e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1} \cdot 2$ である。
よって、導関数は $2e^{2x+1}$ となる。

6. 演習問題

練習問題 1

関数$f(x) = e^{2x}$について、$f(0)$と$f'(0)$を求め、それぞれの意味の違いを説明しなさい。

練習問題 2

関数 $y = 5^x$ を微分しなさい。

練習問題 3

関数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ を微分しなさい。

練習問題 4

関数 $y = e^{3x-2}$ を微分しなさい。

©ミライコーチング

練習問題 5

関数 $y = 2^{x^2}$ を微分しなさい。

練習問題 6

関数 $y = x^2 e^x$ を微分しなさい。

練習問題 7

関数 $y = \frac{e^x}{x+1}$ を微分しなさい。ただし、$x \neq -1$ とする。

練習問題 8

次の誤った計算について、どこが誤りかを説明し、正しい導関数を求めなさい。
$y = e^{2x}$ に対して、$(e^{2x})' = e^{2x}$ とした。

7. 演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

まず、関数値$f(0)$は$x = 0$を代入した値である。
したがって、$f(0) = e^0 = 1$である。
次に、導関数を求める。
$(e^{2x})' = 2e^{2x}$であるから、$f'(0) = 2e^0 = 2$となる。
$f(0)$は点$(0, 1)$における関数の高さを表し、$f'(0)$はその点での接線の傾きを表す。
よって、$f(0) = 1$と$f'(0) = 2$は異なる量を表している。

練習問題 2 の解答・解説

底が 5 の指数関数なので、一般の指数関数の微分公式 $(a^x)' = a^x \log a$ を用いる。
ここでは $a = 5$ であるから、$(5^x)' = 5^x \log 5$ となる。
したがって、導関数は $5^x \log 5$ である。

練習問題 3 の解答・解説

底は $a = \frac{1}{3}$ であり、$a > 0$ を満たす。
一般公式より、$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \log \frac{1}{3}$ となる。
$\log \frac{1}{3} < 0$ なので、この指数関数の微分係数は常に負になる。

練習問題 4 の解答・解説

指数部分を $g(x) = 3x - 2$ とおく。
$g'(x) = 3$ である。
合成関数の微分より、$\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} g'(x)$ となる。
したがって、$\left(e^{3x-2}\right)' = e^{3x-2} \cdot 3$ である。
よって、導関数は $3e^{3x-2}$ となる。

練習問題 5 の解答・解説

指数部分を $g(x) = x^2$ と考える。
底は 2 なので、一般の合成指数関数の公式 $\left(a^{g(x)}\right)' = a^{g(x)} \log a \cdot g'(x)$ を使う。
$g'(x) = 2x$ であるから、$\left(2^{x^2}\right)' = 2^{x^2} \log 2 \cdot 2x$ となる。
したがって、導関数は$2 \cdot 2^{x^2} \cdot \log 2 \cdot x$である。

練習問題 6 の解答・解説

積の微分を用いる。
x^2 の微分は $2x$ であり、e^x の微分は e^x である。
したがって、$(x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$ となる。
それぞれを代入すると、$(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x$ である。
よって、導関数は $e^x(2x + x^2)$ とまとめられる。

練習問題 7 の解答・解説

定義域は$x \neq -1$であるため、分母が 0 にならず商の微分を用いることができる。
分子を$f(x) = e^x$、分母を$g(x) = x + 1$とおく。
$f'(x) = e^x$であり、$g'(x) = 1$である。
商の微分を用いると、次のように計算できる。

$$y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

したがって、導関数は$\frac{xe^x}{(x+1)^2}$である。
定義域は元の関数と同じく$x \neq -1$である。

練習問題 8 の解答・解説

誤りは、指数部分 $2x$ の変化を考えていない点にある。
e^{2x} は $e^{g(x)}$ の形であり、$g(x) = 2x$ と考える必要がある。
$g'(x) = 2$ なので、合成関数の微分より $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$ となる。
したがって、正しい導関数は $2e^{2x}$ である。
指数関数の外側だけを微分するのではなく、指数部分の微分も掛けることが重要である。

©ミライコーチング