

第 124 講 対数不等式

学習目標

対数不等式で、次のことが自力でできるようになることを目標とする。

- ・ 対数の真数条件を先に求め、定義域を整理できる。
- ・ 底が $a > 1$ か $0 < a < 1$ かによって、不等号の向きが変化する理由を説明できる。
- ・ 対数を含む不等式を、指数の大小比較へ変換して解ける。
- ・ 求めた範囲と真数条件の共通部分を取り、境界を正しく判断できる。

対数不等式を解くときの中心

対数不等式では、式変形を始める前に各真数が正であることを確認することが重要である。

対数 $\log_a A$ は、底の条件 $a > 0, a \neq 1$ に加えて、真数条件 $A > 0$ が必要である。

したがって、対数不等式を解く基本手順は次の通りである。

1. 各対数の真数条件を求める。
2. 底 a が $a > 1$ か $0 < a < 1$ かを確認する。
3. 対数の比較を、真数の比較へ変換する。
4. 最後に、変形後の解と真数条件の共通部分を取る。

対数を含む不等式では、 x 自身が正か負かで判断してはいけない。見るべきものは、あくまで各対数の真数である。

底による増減の違い

底 a を $a > 0, a \neq 1$ とする。

$A > 0, B > 0$ のとき、次のように計算する。

$$a > 1: \log_a A < \log_a B \Leftrightarrow A < B$$

$$0 < a < 1: \log_a A < \log_a B \Leftrightarrow A > B$$

これは対数関数 $y = \log_a x$ の増減による。

$a > 1$ のとき、対数関数は増加するため、入力的大小関係はそのまま保たれる。

$0 < a < 1$ のとき、対数関数は減少するため、入力的大小関係が逆転する。

同じ理由で、 $\leq$ や $\geq$ の場合も等号はそのまま保たれる。

なぜ底で向きを判断するのか

指数と対数の関係は、 $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$ である。

$y = a^x$ の増減は底によって決まる。

$a > 1$ では指数関数が増加するため、指数の大小と値の大小は一致する。

一方、 $0 < a < 1$ では指数関数が減少するため、指数の大小と値の大小が逆転する。

対数不等式でも同じ構造が現れるため、底の範囲確認が必要になる。

定数との比較

対数と定数を比較するときも、基本は真数の比較へ戻す。

$a > 0, a \neq 1, A > 0, c$ を実数とする。このとき、 $c = \log_a a^c$ であり、さらに $a^c > 0$ である。

したがって、 $\log_a A$ と c の比較は、 $\log_a A$ と $\log_a a^c$ の比較として考えることができる。

$a > 1$ のとき、対数関数は増加するため、 $\log_a A < c \Leftrightarrow A < a^c$ となり、不等号の向きは保たれる。

同様に、 $\log_a A \leq c \Leftrightarrow A \leq a^c$ である。

一方、 $0 < a < 1$ のとき、対数関数は減少するため、 $\log_a A < c \Leftrightarrow A > a^c$ となり、不等号の向きが逆転する。

非厳密不等号の場合も同じで、 $\log_a A \leq c \Leftrightarrow A \geq a^c$ ($0 < a < 1$) となる。

ただし、どちらの場合でも元の対数式が存在するためには $A > 0$ が必要である。変形後の不等式で $A = 0$ となる境界を含めてはいけない。

解法の判断軸

対数不等式では、次の順序を崩さないことが重要である。

1. 真数条件を求める。
2. 底の範囲を確認する。
3. 対数を外して真数の不等式へ変換する。
4. 真数条件との共通部分を取る。

特に、積の対数へまとめる場合は注意が必要である。

$\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$ を使うには、 $A > 0$, $B > 0$ が必要である。

$AB > 0$ だけを満たす範囲には、 $A < 0$, $B < 0$ の場合も含まれるため、元の対数式の定義域とは一致しない。

境界の扱い

不等式を解いた後は、境界が元の式で使えるかを必ず確認する。

真数が 0 になる点は、対数が定義されないため除外する。

一方、非厳密不等号 $\leq$ や $\geq$ では、等号成立点が真数条件を満たすなら解に含める。

また、置換 $t = \log_a x$ を使う場合、 t は実数全体を動く。ただし、 x に戻すときは底が 1 未満の場合に増減の向きを再確認する必要がある。

例題 1

$\log_2 (x - 1) > 2$ を解きなさい。

例題 1 の解答・解説

対数が存在するため、まず真数条件を確認する。

$x - 1 > 0$ より、 $x > 1$ である。

底は $2 > 1$ であるため、対数関数は増加する。したがって、不等号の向きは変わらない。

$$\log_2 (x - 1) > 2 \Leftrightarrow x - 1 > 2^2$$

よって、 $x - 1 > 4$ から、 $x > 5$ を得る。

最後に真数条件との共通部分を取る。

$x > 5$ はすでに $x > 1$ を満たすため、解はそのままである。

境界 $x = 5$ では、 $\log_2 4 = 2$ となり、元の不等式は等号では満たさない。したがって含まれない。

区間を求めた後、代表的な値で条件を確認する。

例えば $x = 9$ では真数条件を満たし、 $\log_2 8 = 3 > 2$ となるため成立する。

一方、 $x = 3$ では、 $\log_2 2 = 1$ となり、不等式は成立しない。

ただし、この確認は求めた区間が正しいかを確かめるためのものであり、代表値だけで全ての解を証明したことにはならない。

以上より、解は $x > 5$ である。

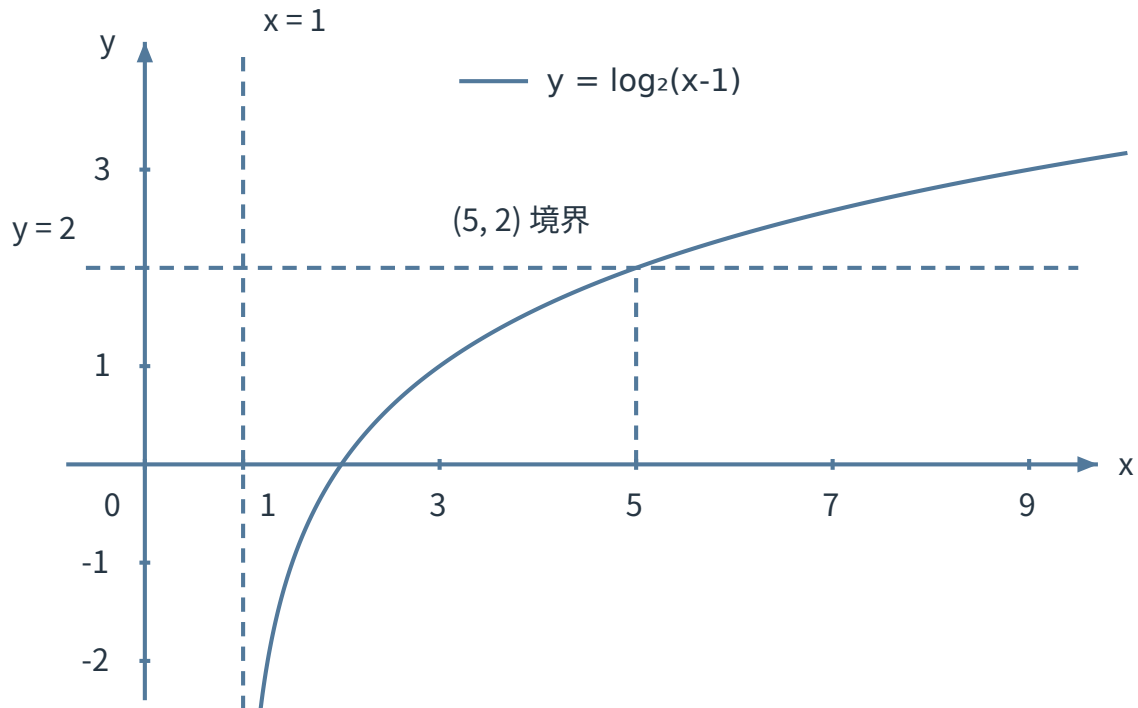


図1 実線 $y = \log_2(x-1)$ と破線 $y = 2$ の境界は $(5, 2)$ 。増加関数なので、実線が破線より上にある範囲は $x > 5$ 。等号がないため境界の 5 は含めない。真数条件は $x > 1$ 、破線 $x = 1$ は漸近線。曲線の表示窓の端には点を付けない。

例題 2

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq -1$ を解きなさい。

例題 2 の解答・解説

まず真数条件を確認する。

$x + 1 > 0$ より、 $x > -1$ である。

底は $\frac{1}{2}$ であり、 $0 < \frac{1}{2} < 1$ を満たすため、対数関数は減少する。不等号の向きが逆になることに注意する。

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \geq -1 \Leftrightarrow x + 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

さらに、次のように計算する。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

であるから、 $x + 1 \leq 2$ より、 $x \leq 1$ となる。

ここで、真数条件 $x > -1$ との共通部分を取る。

したがって、 $-1 < x \leq 1$ である。

境界 $x = -1$ では真数が 0 となり、対数が定義されないため除外する。

一方、 $x = 1$ では、 $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ となり、等号が成立するため含む。

求めた区間の境界と、 x 自身の正負を確認する。

例えば $x = -\frac{1}{2}$ では真数は $x + 1 = \frac{1}{2} > 0$ であり、 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \geq -1$ となるため成立する。

これは、対数不等式では x 自身が負であっても、真数が正なら解になり得ることを示している。

一方、 $x = 3$ では、 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 < -1$ となり、不等式は成立しない。

以上より、解は $-1 < x \leq 1$ である。

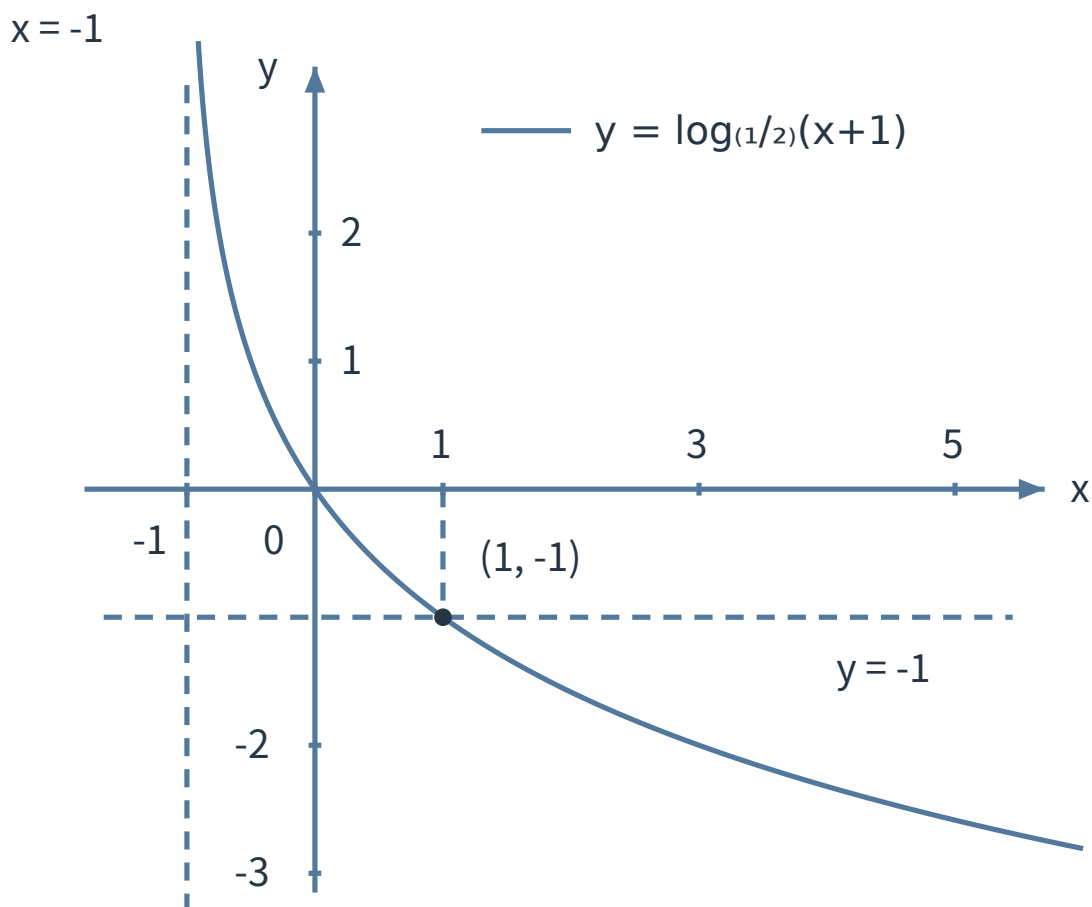


図2 実線 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ は減少する。破線 $y = -1$ 以上になるのは交点 $(1, -1)$ の左側なので、不等号の向きが逆になり $x+1 \leq 2$ 。
真数条件 $x > -1$ と合わせて $-1 < x \leq 1$ 。黒丸 $x = 1$ は含め、漸近線 $x = -1$ は含めない。

例題 3

$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) \leq 3$ を解きなさい。

例題 3 の解答・解説

2つの対数があるため、それぞれの真数条件を確認する。

$x-1 > 0$, $x-3 > 0$ より、 $x > 3$ である。

この条件のもとでは、対数の性質を使える。

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = \log_2((x-1)(x-3))$$

したがって、 $\log_2((x-1)(x-3)) \leq 3$ となる。

底が2である対数関数 $y = \log_2 x$ が増加関数であるため、不等号の向きは変わらない。

$$(x-1)(x-3) \leq 2^3$$

$$\text{よって、} (x-1)(x-3) \leq 8$$

展開すると、 $x^2 - 4x + 3 \leq 8$ であるから、 $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ となる。

因数分解すると、 $(x-5)(x+1) \leq 0$ である。

したがって候補範囲は、 $-1 \leq x \leq 5$ である。

最後に真数条件 $x > 3$ との共通部分を取る。

$3 < x \leq 5$ となる。

境界 $x = 3$ では真数 $x - 3$ が 0 になり、元の対数が定義されないため除外する。

境界 $x = 5$ では、 $(x - 1)(x - 3) = 4 \cdot 2 = 8$ となり、等号が成立するため含む。

求めた区間の端点と内部の値を確認する。

$x = 5$ では個々の真数は $x - 1 = 4$, $x - 3 = 2$ であり、どちらも正である。

したがって元の式が定義され、 $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$ となるため、等号成立で含まれる。

また、内部の値として $x = 4$ を考えると、 $\log_2 3 + \log_2 1 = \log_2 3$ であり、 $\log_2 3 < \log_2 8 = 3$ なので成立する。

ただし、これらの確認は得られた解の端点や内部の様子を確かめるものであり、全区間は先に行った同値変形と真数条件との共通部分によって導いている。

以上より、解は $3 < x \leq 5$ である。

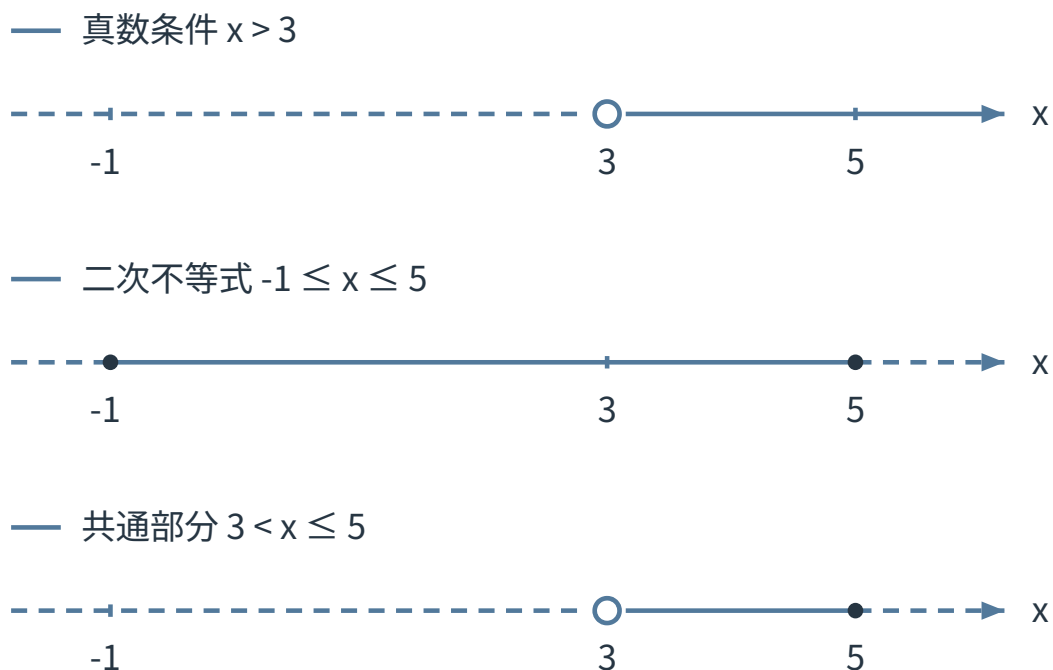


図3 3段とも x の数直線で、目盛りの位置をそろえている。実線が各条件を満たす範囲、破線は範囲外の補助軸。上段は真数条件 $x > 3$ で右へ無限に続く。中段は二次不等式の解 $-1 \leq x \leq 5$ 。下段の共通部分は $3 < x \leq 5$ 。白丸の3を除き、黒丸の5を含める。

練習問題 1

$\log_3(x + 2) > 1$ を解きなさい。

練習問題 2

$\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq -1$ を解きなさい。

練習問題 3

$\log_5(x+4) \geq \log_5(2x-3)$ を解きなさい。

練習問題 4

$\log_2(x-2) + \log_2(x+1) < 3$ を解きなさい。

練習問題 5

$t = \log_{\frac{1}{2}} x$ とおく。
 $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$ を解きなさい。

練習問題 6

$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ を解きなさい。

練習問題 7

次の解答の誤りを指摘し、正しい解を求めなさい。

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-5) \leq 2$$

誤った解答：

「真数条件を考えずにまとめると、 $\log_2((x-1)(x-5)) \leq 2$ より、 $(x-1)(x-5) \leq 4$ となる。
さらに、 $x^2 - 6x + 1 \leq 0$ から、 $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ なので、これが解である。」

練習問題 8

$\log_3(x-1) + \log_3(5-x) \geq 1$ を解きなさい。

練習問題 1 の解答・解説

まず真数条件を確認する。

$x+2 > 0$ より、 $x > -2$ である。

底は $3 > 1$ であるため、対数関数は増加する。不等号の向きは変わらない。

$$\log_3(x+2) > 1 \Leftrightarrow x+2 > 3$$

したがって、 $x > 1$ となる。

最後に真数条件との共通部分を取る。

$x > 1$ は $x > -2$ を満たす。

境界 $x = 1$ では $\log_3 3 = 1$ となり、元の不等式は等号では満たさないため除外する。

したがって、解は $x > 1$ である。

練習問題 2 の解答・解説

まず真数条件を確認する。

$2x - 1 > 0$ より、 $x > \frac{1}{2}$ である。

底は $\frac{1}{3}$ であり、 $0 < \frac{1}{3} < 1$ なので、対数関数は減少する。不等号の向きが逆になる。

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq -1 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

よって、 $2x - 1 \geq 3$ となる。

したがって、 $2x \geq 4$ より、 $x \geq 2$ である。

真数条件 $x > \frac{1}{2}$ との共通部分を取ると、 $x \geq 2$ となる。

境界 $x = 2$ では、 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ であり、等号が成立するため含む。

したがって、解は $x \geq 2$ である。

練習問題 3 の解答・解説

真数条件をそれぞれ確認する。

$x + 4 > 0$ より $x > -4$ 、 $2x - 3 > 0$ より $x > \frac{3}{2}$ である。

共通して必要な条件は、 $x > \frac{3}{2}$ である。

底は $5 > 1$ なので、対数関数は増加する。

$$\log_5(x + 4) \geq \log_5(2x - 3) \Leftrightarrow x + 4 \geq 2x - 3$$

よって、 $x \leq 7$ となる。

真数条件との共通部分を取る。

$\frac{3}{2} < x \leq 7$ である。

端点を確認する。

$x = \frac{3}{2}$ では $2x - 3 = 0$ となり、対数が定義されないため除外する。

$x = 7$ では両辺が等しくなり、等号が成立するため含む。

したがって、解は $\frac{3}{2} < x \leq 7$ である。

練習問題 4 の解答・解説

個々の真数条件を確認する。

$x - 2 > 0$, $x + 1 > 0$ より、 $x > 2$ である。

この条件があるため、対数の和をまとめることができる。

$$\log_2(x - 2) + \log_2(x + 1) = \log_2((x - 2)(x + 1))$$

したがって、 $\log_2((x - 2)(x + 1)) < 3$ となる。

底 2 は 1 より大きいため、 $(x - 2)(x + 1) < 8$ である。

展開すると、 $x^2 - x - 2 < 8$ より、 $x^2 - x - 10 < 0$ となる。

整数係数の一次式の積には因数分解できないため、解の公式で境界を求める。

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

したがって、次のように計算する。

$$\frac{1 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$$

真数条件 $x > 2$ と共通部分を取る。

$$2 < x < \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$$

端点 $x = 2$ は真数 $x - 2$ が 0 になり、元の式で定義されないため除外する。

右端は厳密不等号なので含まない。

したがって、解は $2 < x < \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ である。

練習問題 5 の解答・解説

まず真数条件を確認する。

$x > 0$ である。

ここで、 $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ とおく。

$x > 0$ の範囲では、 x は正の実数全体を動くため、 t は実数全体を動く。したがって、負の t も除外しない。

元の不等式は、 $t^2 - t - 2 \leq 0$ となる。

因数分解すると、 $(t - 2)(t + 1) \leq 0$ である。

よって、 $-1 \leq t \leq 2$ となる。

ここで $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ を元に戻す。

底は $0 < \frac{1}{2} < 1$ であるため、対数関数は減少する。不等号の向きに注意して指数へ戻す。

$-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ より、次のように計算する。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

したがって、 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ である。

最後に真数条件との共通部分を確認する。

この区間のすべてで $x > 0$ を満たすため、そのまま解となる。

端点を確認する。

$x = \frac{1}{4}$ では、 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ となり、 $(2 - 2)(2 + 1) = 0$ で等号成立するため含む。

$x = 2$ では、 $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ となり、 $(-1 - 2)(-1 + 1) = 0$ で等号成立するため含む。

また、両端とも真数 x は正であり、元の対数式は定義される。

したがって、解は $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ である。

練習問題 6 の解答・解説

まず真数条件を確認する。

$x + 3 > 0$, $x - 1 > 0$ より、 $x > 1$ である。

底は $\frac{1}{2}$ であり、 $0 < \frac{1}{2} < 1$ なので、対数関数は減少する。不等号が逆転する。

$\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ より、 $x + 3 < x - 1$ となる。

整理すると、 $4 < 0$ となり、これは成立しない。

したがって、真数条件を満たす範囲と共通になる部分は存在しない。

解は空集合であり、解なしである。

練習問題 7 の解答・解説

誤った解答の問題点は、真数条件を確認せずに積の対数へまとめている点である。

個々の真数条件は、 $x - 1 > 0$, $x - 5 > 0$ より、 $x > 5$ である。

この条件がある範囲で、 $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 5) = \log_2((x - 1)(x - 5))$ とまとめる。

底は $2 > 1$ なので、 $(x - 1)(x - 5) \leq 4$ となる。

展開すると、 $x^2 - 6x + 5 \leq 4$ より、 $x^2 - 6x + 1 \leq 0$ である。

解の境界は、 $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$ となる。

したがって候補範囲は、 $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ である。

しかし、元の真数条件は $x > 5$ である。

共通部分を取ると、 $5 < x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ となる。

誤答では真数条件を無視しているため、負の真数を含む範囲まで解としてしまっている。

端点 $x = 5$ は真数 $x - 5 = 0$ で未定義のため除外する。

右端は等号成立点なので含む。

したがって、正しい解は $5 < x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ である。

練習問題 8 の解答・解説

まず個々の真数条件を確認する。

$x - 1 > 0$, $5 - x > 0$ より、 $1 < x < 5$ である。

この条件のもとで対数の和をまとめる。

$\log_3(x - 1) + \log_3(5 - x) = \log_3((x - 1)(5 - x))$

したがって、 $\log_3((x - 1)(5 - x)) \geq 1$ となる。

底は $3 > 1$ なので、不等号の向きは変わらない。

$(x - 1)(5 - x) \geq 3$

展開すると、 $-x^2 + 6x - 5 \geq 3$ より、 $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$ となる。

両辺に -1 を掛けると向きが変わる。

$x^2 - 6x + 8 \leq 0$

因数分解すると、 $(x - 2)(x - 4) \leq 0$ である。

したがって、 $2 \leq x \leq 4$ となる。

真数条件 $1 < x < 5$ との共通部分を取ると、そのまま $2 \leq x \leq 4$ である。

端点を確認する。

$x = 2, 4$ では積が 3 となり、対数は 1 になるため、等号成立で含む。

また、 $x = 1, 5$ は真数が 0 になるため元の式では使えないが、今回の解には含まれていない。

したがって、解は $2 \leq x \leq 4$ である。