第 260 講 数学的な表現を選ぶ

学習目標

- 求めたいことに応じて、文章・式・表・図やグラフの長所を説明できる。
- 問いの種類と必要な正確さから、主に使う表現を一つ選び、その理由を説明できる。
- 選んだ表現から読み取れることと、読み取れないことを区別できる。

1. 表現は目的に合わせて選ぶ

同じ対象でも、見たい性質によって適切な表現は変わる

数学的な表現には、文章、式、表、図、グラフなどがある。大切なのは、情報を別の形に飾り直すことではなく、**何を知りたいか**に合わせて関係の見え方を変えることである。

- 文章は、量の意味、条件、単位、例外を伝えるのに向く。
- 式は、数量関係を一般的かつ簡潔に表し、未知の値を計算するのに向く。
- 表は、離れた複数の値を正確に並べ、対応や規則性を調べるのに向く。
- 図やグラフは、位置関係、全体の変化、大小、交点などを視覚的に捉えるのに向く。

どの表現にも限界がある。表に書かれていない値は表だけでは直接分からず、グラフから読んだ値は目盛りや線の太さにより近似になることがある。式だけでは、変数の意味や定義域が欠ける場合もある。そのため、目的、必要な正確さ、対象とする範囲を先に確認するのである。

表現を選ぶ 3 つの問い

1. 何を求め、何を比較したいか。
2. 正確な値が必要か、全体の傾向を見たいか。
3. その表現だけで、変数の意味、範囲、単位、例外が伝わるか。

例題 1：目的に合う表現を選ぶ

水が毎分 3 L ずつ一定の割合で容器に入り、入れ始めには 2 L 入っていた。開始から x 分後の水量を y L とし、$0 \leq x \leq 6$ とする。この関係について、式、表、グラフの中から、各問いで主に使う表現を選べ。

(1) 5 分後の水量を正確に求めるには、どの表現を主に使うべきか。

(2) 0 分後から 3 分後までの整数分ごとの水量を正確に見比べるには、どの表現を主に使うべきか。

(3) 0 分後から 6 分後まで、水量がどのように変化するかを全体として捉えるには、どの表現を主に使うべきか。

例題 1 の解答・解説

(1) 式を主に使うべきである。$x = 5$ を代入すると $y = 3 \times 5 + 2 = 17$ なので、5 分後の水量は正確に 17 L である。

(2) 表を主に使うべきである。決まった 4 つの場合の値を正確に対応させて一覧できる。

x（分）	0	1	2	3
y（L）	2	5	8	11

©ミライコーチング

(3) グラフを主に使うべきである。右上がりの直線から、一定の割合で増えることを一目で捉えられる。目的が変われば、同じ数量関係でも主に使う表現が変わるのである。

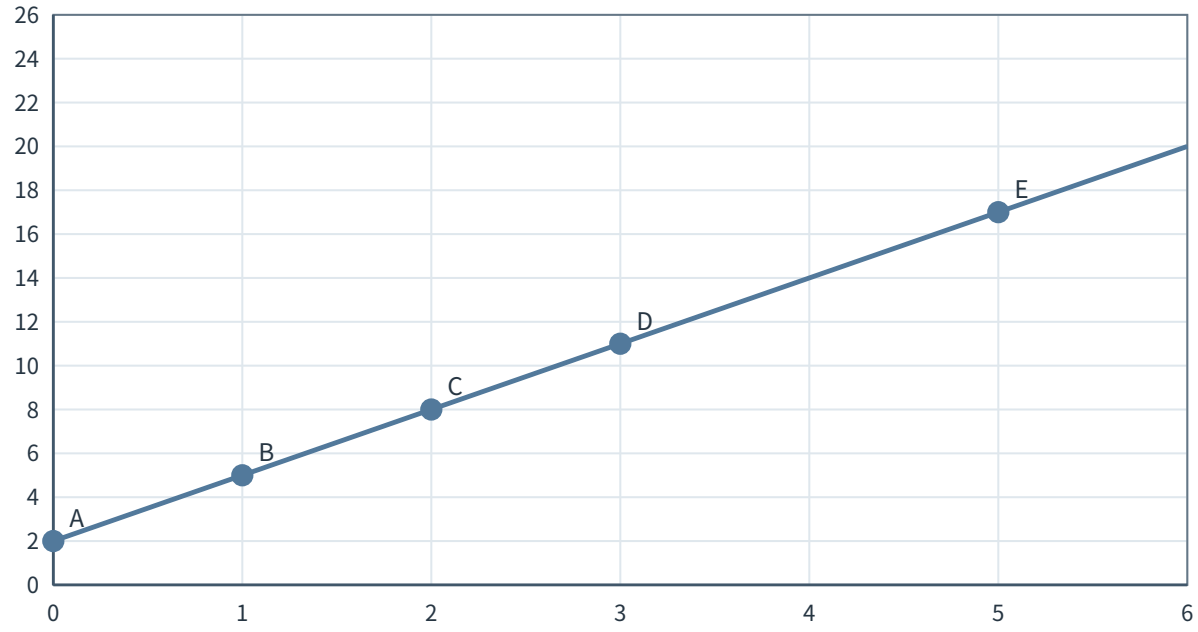

図 1　水量 $y = 3x + 2$ の変化

このグラフでは、右上がりの直線から一定の割合で増えることを一目で捉えられる。一方、点 E の値を正確に求めるときは式で計算する方が確実である。

2. 問いの種類から主役を決める

表現の選択は、問いの言葉から始める

問いに「正確に求めよ」とあれば式、「各場合を対応させよ」とあれば表、「変化の様子」や「全体の傾向」とあればグラフ、「位置やつながり」とあれば図が候補になる。ただし、キーワードだけで機械的に決めてはいけない。値が少数の決まった場合だけなら表が分かりやすく、一般の値を扱うなら式が有効である。

知りたいこと	主に選ぶ表現	選ぶ理由	主な限界
未知の値、一般的な関係	式	文字を用いて正確に計算できる	変数の意味や範囲を別に示す必要がある
決まった場合どうしの対応	表	離れた値を正確に一覧できる	表にない場合は直接読めない
増減、傾向、交点	グラフ	全体の形を視覚的に捉えられる	読み取り値は近似になることがある
位置、形、つながり	図	空間的な関係を見渡せる	模式図は長さや角度が正確とは限らない

この表自体も、四つの表現の長所を項目ごとに比較するという目的に合わせて選ばれた表現である。

©ミライコーチング

例題 2：正確な値を求める表現

ある店の配送料 y 円は、荷物の質量 x kg に対して $y = 180x + 450$ で定められている。ただし $0 < x \leq 10$ とする。質量 6.5 kg の荷物の配送料を正確に求めるには、式とグラフのどちらを主に使うべきか。理由と結果を答えよ。

例題 2 の解答・解説

式を主に使うべきである。グラフでは目盛りの間を読むため近似になる可能性があるが、式なら $x = 6.5$ を代入して正確に計算できる。

$$y = 180 \times 6.5 + 450 = 1620$$

したがって、配送料は 1620 円である。なお、6.5 は定義域 $0 < x \leq 10$ に含まれる。

例題 3：条件を数直線で表す

実数 x が $-1 < x \leq 3$ を満たす。この条件を文章で説明し、数直線で表す利点を述べよ。

例題 3 の解答・解説

文章では「x は -1 より大きく、3 以下の実数である」と表せる。数直線では、-1 を含まないことを白丸、3 を含むことを黒丸で区別し、その間を示せる。端点を含むかどうかと範囲全体を同時に見られることが利点である。



図 2　$-1 < x \leq 3$ を表す数直線

3. 選んだ表現の限界を確かめる

見やすさと正しさは同じではない

表現を選ぶときは、「その表現で何が見えるか」とともに「何までは言えないか」を確認する必要がある。

式 $y = 3x + 2$ は値を正確に計算できるが、水量の場面では $0 \leq x \leq 6$ という範囲を外して使えない。グラフは増加の様子を示すが、線を $x = 6$ より右へ延ばしただけでは、実際の水量を表す根拠にならない。図が見た目に直角であっても、直角という条件や記号がなければ直角とは断定できない。

したがって、主に使う表現を決めたら、変数の意味、単位、定義域、測定の間隔、図が模式的かどうかを確認するのである。

©ミライコーチング

演習問題

問題 1：表現の選択

次の目的に最も適するものを、文章、式、表、グラフから一つ選び、理由を述べよ。
(1) $y = 2x - 5$ における $x = 137$ のときの y を正確に求める。
(2) ある量が時間とともに増えているか減っているかを全体として捉える。
(3) 4 つの商品の価格と質量を、商品ごとに正確に対応させる。

問題 2：条件を伝える表現

「実数 x は -2 より大きく、5 以下である」という条件を、誤解なく簡潔に伝えるには文章と不等式のどちらを主に使うべきか。選んだ理由を述べ、その表現で条件を書け。

問題 3：値の対応を見る表現

3 種類の封筒 A、B、C について、質量と郵送料がそれぞれ (20 g, 110 円)、(45 g, 140 円)、(90 g, 180 円) である。封筒ごとの 2 つの値を正確に対応させて比較するには、表とグラフのどちらを主に使うべきか。理由を答えよ。

問題 4：グラフの役割と限界

例題 1 の水量のグラフについて答えよ。
(1) 水量が 8 L から 17 L になるまでに何分かかるか。式を用いて正確に求めよ。
(2) 0 分後から 6 分後までの水量の増え方を全体として捉えるには、式とグラフのどちらを主に使うべきか。理由を答えよ。
(3) このグラフを $x = 10$ まで延長して実際の水量を表してよいとは限らない理由を述べよ。

問題 5：模式図の限界

三角形の模式図を見たところ、2 辺の長さが同じように見えた。しかし、問題文には辺の長さや等しいことを示す印がない。この図だけから 2 辺が等しいと結論してよいか。図という表現の限界に触れて答えよ。

問題 6：表から言える範囲

正の整数 $n = 1, 2, 3$ に対する数 a_n が、それぞれ $5, 8, 11$ であることだけが表に示されている。この表だけから $a_4 = 14$ と断定してよいか。表という表現が示す範囲に基づいて説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) 式が最も適する。$x = 137$ を代入すれば、$y = 2 \times 137 - 5 = 269$ と正確に計算できる。
(2) グラフが最も適する。軸に沿った全体の上がり下がりから、増減の傾向を視覚的に捉えられる。ただし、正確な値が必要なら式や表で補う。
(3) 表が最も適する。各商品の価格と質量を同じ行に置けば、離れた値を正確に対応させて比較できる。

問題 2 の解答・解説

不等式を主に使うべきである。2 つの境界と、それぞれを含むかどうかを一つの式で簡潔かつ正確に示せる。条件は $-2 < x \leq 5$ である。

問題 3 の解答・解説

表を主に使うべきである。今回は 3 種類という決まった対象について、封筒名、質量、郵送料を同じ行に並べれば、対応を正確に保ったまま比較できる。グラフは全体の傾向を見るのに向くが、この目的では各値の読み取りが間接的になる。

問題 4 の解答・解説

(1) $y = 8$ のとき $3x + 2 = 8$ より $x = 2$、$y = 17$ のとき $3x + 2 = 17$ より $x = 5$ である。したがって、かかる時間は $5 - 2 = 3$ 分である。
(2) グラフを主に使うべきである。右上がりの直線の全体から、水量が一定の割合で増えることを視覚的に捉えられる。
(3) 問題では $0 \leq x \leq 6$ と定めている。6 分より後も同じ割合で入るか、容器があふれないかという情報はない。したがって、直線を延長できても、それが実際の水量を表すとは限らない。

問題 5 の解答・解説

結論してはいけない。模式図は位置や形の関係を考える助けになるが、見た目の長さや角度が数学的に正確であるとは限らない。2 辺が等しいと結論するには、等しいという条件、同じ長さを示す印、または長さを導ける別の根拠が必要である。

問題 6 の解答・解説

断定してはいけない。この表が定めているのは $n = 1, 2, 3$ の値だけである。$a_4 = 14$ とする規則も、$a_4 = 100$ とする規則も、示された 3 つの値とは矛盾しない。a_4 を決めるには、一般項や数列の作り方などの追加条件が必要である。

©ミライコーチング