

第 116 講 累乗根と有理数指数

学習目標

この講では、累乗根の意味を理解し、偶数乗根と奇数乗根の違いを説明できるようになる。また、主根の記号と方程式の解を区別し、正の数を底とする有理数指数を根号を使って計算できるようになる。

具体的には、次のことを目標とする。

- n 乗根がどのような数を表すかを理解する。
- $\sqrt[n]{a}$ と方程式 $x^n = a$ の解の違いを判断する。
- 奇数乗根では負の数も扱えることを理解する。
- $a > 0$ のときの $a^{\frac{m}{n}}$ の意味を根号から説明できる。
- 負指数が逆数を表すことと、根号の中の符号条件を正しく扱える。

累乗根を考える理由

正の整数指数では、指数は同じ数を何回掛けるかを表す考え方である。

しかし、指数をさらに広げるには「3 回掛けて 8 になる数」や「4 回掛けて 16 になる数」のような逆向きの操作が必要になる。

例えば、 $2^3 = 8$ であるため、8 から「3 乗する前の数」を探すと 2 になる。この考え方を一般化したものが累乗根である。

累乗根では、何乗して元の数になるかを見ることが重要である。特に偶数回の累乗では符号が消えるため、奇数回の累乗とは異なる扱いになる。

n 乗根

n を正整数、 a, b を実数とする。

b が $b^n = a$ を満たすとき、 b を a の n 乗根という。

n が偶数の場合、次のように分類される。

- $a > 0$ のとき、 a の実数の n 乗根は 2 つあり、正の根と負の根が存在する。根号 $\sqrt[n]{a}$ は、そのうち 0 以上の主根を表す。
- $a = 0$ のとき、実数の n 乗根は 0 だけである。
- $a < 0$ のとき、実数の n 乗根は存在しない。

n が奇数の場合、任意の実数 a に対して、 a の実数の n 乗根はただ 1 つ存在する。根号 $\sqrt[n]{a}$ は、その一意な実数根を表す。

したがって、偶数乗根では根号が表す値は非負の主根であり、奇数乗根では実数の範囲でただ 1 つに定まる根を表す。

$n = 1$ の場合は、1 乗根はもとの数そのものであり、 $\sqrt[n]{a} = a$ である。

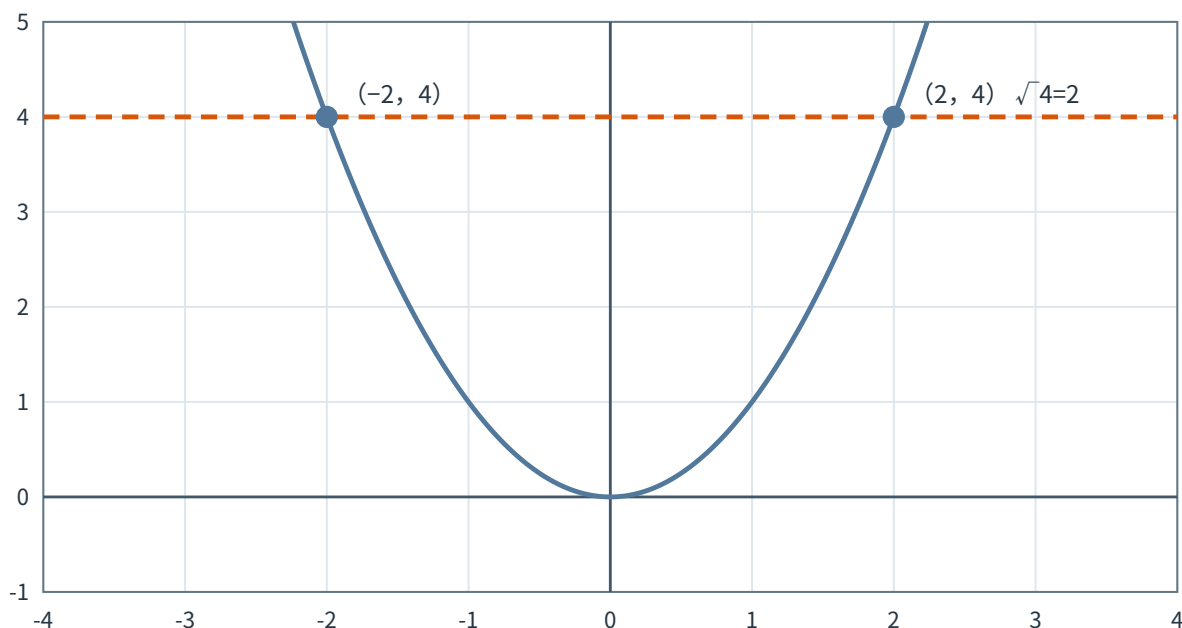


図1 横軸 x 、縦軸 y 。実線： $y = x^2$ 、破線： $y = 4$ 。方程式 $x^2 = 4$ の解は -2 と 2 。 $\sqrt{4}$ は非負の主値なので、右側の 2 を表す。

偶数乗根と主根

偶数乗根では、正負の数を同じ回数掛けると同じ正の値になる。

例えば、 $2^2 = 4$ 、 $(-2)^2 = 4$ である。このため、 $x^2 = 4$ の解は $x = 2, -2$ である。

しかし、 $\sqrt{4}$ は平方根の中でも 0 以上の数だけを表すため、 $\sqrt{4} = 2$ となる。

この 0 以上の平方根を主根という。

同じように、一般に $\sqrt{a^2} = |a|$ である。

$\sqrt{a^2}$ が表す非負の値について、 $a \geq 0$ なら $\sqrt{a^2} = a$ 、 $a < 0$ なら $\sqrt{a^2} = -a$ となる。

根号は「2乗した結果」だけを見るのではなく、「根号が表す数の範囲」を確認することが大切である。

奇数乗根

n が奇数のとき、 a の n 乗根は1つに定まる。

例えば、 $2^3 = 8$ 、 $(-2)^3 = -8$ である。

奇数乗では符号がそのまま残るため、負の数にも奇数乗根を考えることができる。

したがって、 $\sqrt[3]{-8} = -2$ である。

根号記号が表す値について見ると、偶数乗根では非負の主根を表し、奇数乗根では実数の範囲でただ1つに定まる根を表す。

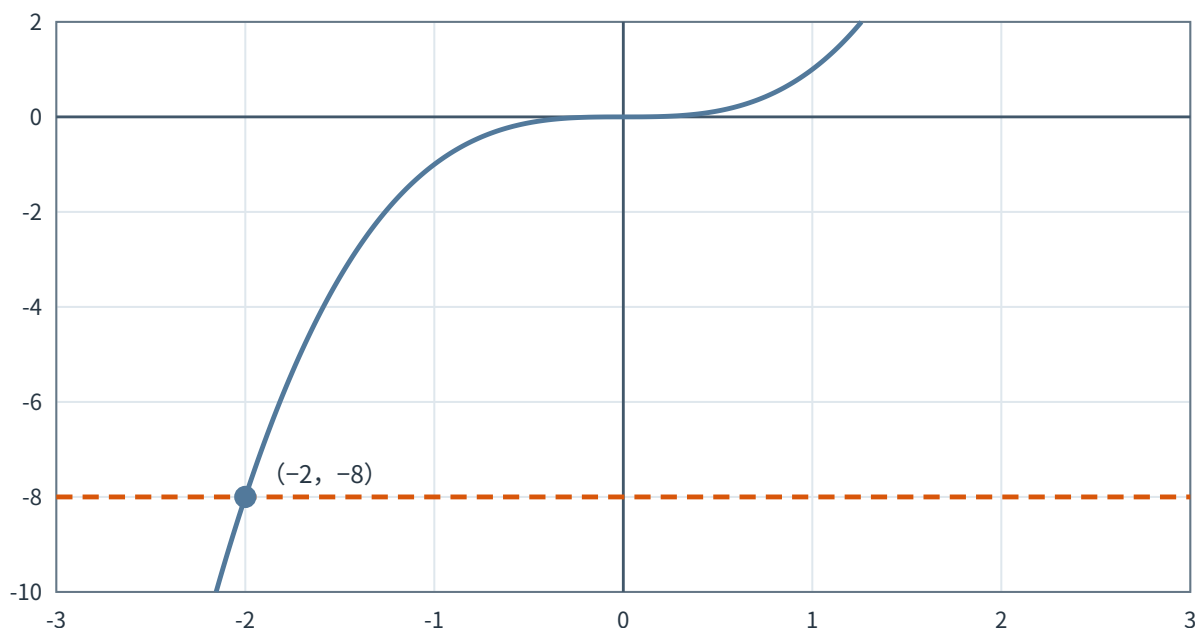


図2 横軸 x 、縦軸 y 。実線： $y = x^3$ 、破線： $y = -8$ 。交点は $(-2, -8)$ の1点だけ。したがって $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。奇数乗根は負の数でも実数として一つに定まる。

累乗根と方程式の解を混同しない

$\sqrt{4}$ と $x^2 = 4$ の解は同じものではない。

$\sqrt{4}$ は主根を表すため、 $\sqrt{4} = 2$ である。

一方、 $x^2 = 4$ を解くと、 $x = 2, -2$ となる。

根号は特定の値を表す記号であり、方程式の解全体を表す記号ではない。

有理数指数

$a > 0$ 、 m を整数、 n を正整数とする。

有理数指数は、 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ と定義する。

これは「まず n 乗根を求め、その後 m 乗する」という意味である。

例えば、 $a^{\frac{2}{3}}$ では、3乗根を求めてから2乗する。

$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2$ という順序になる。

指数の分母が表すもの

有理数指数では、分母が何乗根を使うかを表す。

例えば、 $8^{\frac{1}{3}}$ では3乗根を考える。

8の3乗根は2なので、 $8^{\frac{1}{3}} = 2$ となる。

さらに、 $8^{\frac{2}{3}}$ では、その値を2乗するため、 $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ となる。

分母を見ると「何乗根を使うか」が分かり、分子を見ると「その後何乗するか」が分かる。

有理数指数で扱う底の条件

有理数指数は、 $a > 0$ 、 m を整数、 n を正整数として、 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ と定義する。

この講では、底が正の数である場合を基本として扱う。正の底であれば、指数の分数表記を根号と累乗の組み合わせとして一貫して考えられる。

底が0の場合は、指数が正の有理数 r であるときだけ、 $0^r = 0$ として扱う。

一方で、 0^0 や0の負の有理数指数は、本講では定義しない。負指数では逆数が関係し、0を分母に持つ形が生じるためである。

また、負の底の分数指数は今回は定義対象外とする。負の数を奇数乗根の記号で扱えることと、負の底を分数指数で扱えることは別の話である。

定義されていない式について、普通の等号計算のように変形を続けてはいけない。

約分した指数が同じ値になる理由

正の底では、同じ有理数になる指数は同じ値を表す。

例えば、 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ について考える。

$a > 0$ とし、 b を a の正の4乗根とすると、 $b^4 = a$ である。

このとき、 $b > 0$ であり、 $(b^2)^2 = a$ となる。

また、 $b^2 > 0$ であるため、 b^2 は a の正の平方根である。したがって、 $a^{\frac{2}{4}} = b^2 = a^{\frac{1}{2}}$ となる。

このように、同じ値になる指数は、根号で表したときに同じ正の根を表すことで一致する。

一般の同値な分数についても、正の根の一意性によって同じ値になる。この一例だけで一般の場合のすべてを証明したことにはならないが、約分しても値が変わらない理由を理解する入口になる。

また、例えば8を底にすると、 $8^0 = 1$ 、 $8^{\frac{1}{3}} = 2$ 、 $8^{\frac{2}{3}} = 4$ 、 $8^1 = 8$ となる。

指数が0から1まで $\frac{1}{3}$ ずつ増えると、値は1、2、4、8と順に2倍になっている。これは、有理数指数が整数指数の間を根号によって段階的につないでいることを表している。

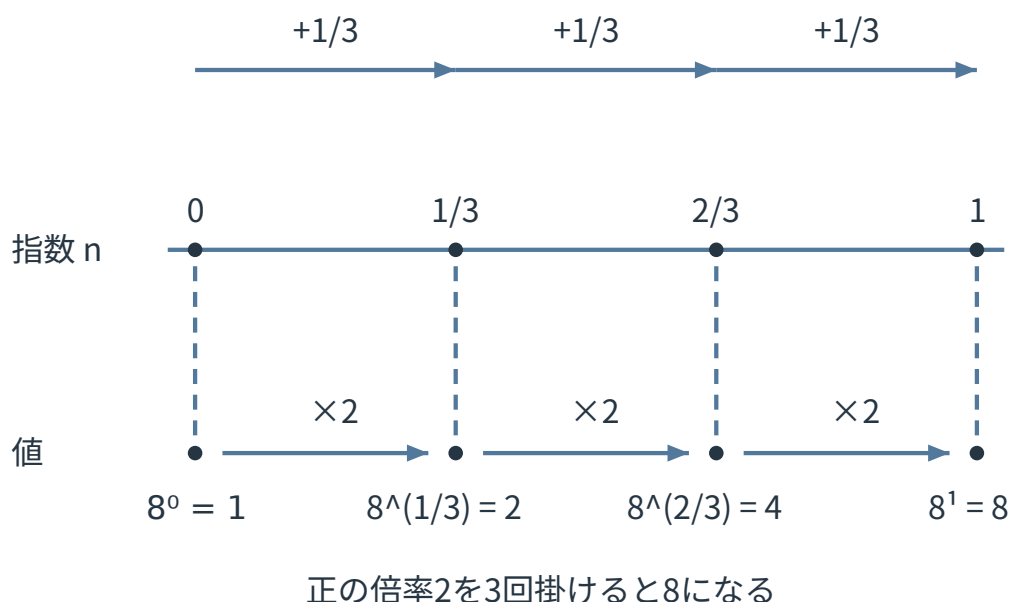


図3 指数0から1までを3等分すると、各段階で指数は $\frac{1}{3}$ 増え、対応する値は2倍になる。上段は指数の数直線、下段は対応する値の列であり、連続曲線ではない。

例題 1：平方根・立方根と方程式の解の区別

次の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $x^2 = 4$ の実数解を求めなさい。また、 $\sqrt{4}$ の値を答えなさい。
 (2) 方程式 $x^3 = -8$ の実数解を求めなさい。また、 (-8) の立方根を答えなさい。

例題 1：平方根・立方根と方程式の解の区別の解説

- (1) $x^2 = 4$ は、2 乗して 4 になる数を探す問題である。
 $2^2 = 4$ 、 $(-2)^2 = 4$ より、 $x = 2, -2$ である。
 一方、 $\sqrt{4}$ は 0 以上の平方根を表すため、 $\sqrt{4} = 2$ である。
 方程式の解は複数ある場合があるが、平方根の記号は主根だけを表す点に注意する。
 (2) $x^3 = -8$ は、3 乗して -8 になる数を探す問題である。
 $(-2)^3 = -8$ より、 $x = -2$ である。
 奇数乗では符号が残るため、負の数の立方根も実数で考えることができる。
 したがって、 (-8) の立方根も -2 である。

例題 2：有理数指数の計算

次の値を求めなさい。

- (1) $8^{\frac{2}{3}}$
 (2) $16^{\frac{3}{4}}$

例題 2：有理数指数の計算の解説

- (1)
 指数の分母 3 を見ると、3 乗根を使う。

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

したがって、 $8^{\frac{2}{3}} = 4$ である。

- (2)
 指数の分母 4 を見ると、4 乗根を使う。

$$\begin{aligned} 16^{\frac{3}{4}} &= \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

したがって、 $16^{\frac{3}{4}} = 8$ である。

有理数指数では、先に根を求め、その後に分子の数だけ累乗する。

例題 3：負指数と根号の符号

次の値を求めなさい。

- (1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$
 (2) $\sqrt{(-5)^2}$

例題 3：負指数と根号の符号の解説

(1)

負指数は逆数を表す。

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

正の指数部分を計算する。

$$\begin{aligned}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

(2)

根号 $\sqrt{(-5)^2}$ が表す主平方根は 0 以上の値である。

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ である。

$\sqrt{(-5)^2}$ は 5 であり、根号が表す主平方根は -5 ではない。

根号で平方根の値を求めるときは、根号が表す非負の主平方根を考える。

演習問題**演習 1：偶数乗根の主根と方程式の解**

次の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $x^2 = 9$ の実数解を求めなさい。
 (2) $\sqrt{9}$ の値を求めなさい。
 (3) (1) と (2) の違いを説明しなさい。

演習 2：奇数乗根と負の数

次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt[3]{-27}$

(2) $\sqrt[5]{-32}$

また、なぜ負の数でも奇数乗根を考えられるのか説明しなさい。

演習 3：偶数乗根が存在しない場合

次の問いに答えなさい。

(1) $\sqrt{-4}$ は実数の範囲で存在するか答えなさい。

(2) その理由を説明しなさい。

演習 4：有理数指数の定義

次の値を求めなさい。

(1) $32^{\frac{2}{5}}$

(2) $81^{\frac{1}{4}}$

ただし、指数の分母と分子がそれぞれ何を表しているか説明しなさい。

演習 5：負の有理数指数

次の値を求めなさい。

(1) $25^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

負指数が表す意味を説明しなさい。

演習 6：分数を底とする有理数指数

次の値を求めなさい。

$\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

計算では、まず何を求めるかを説明しなさい。

演習 7：平方根と絶対値

次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{(-7)^2}$

(2) $\sqrt{x^2}$ を x の符号に注意して表しなさい。

演習 8：指数表記の同値と 0 の扱い

次の問いに答えなさい。

(1) $16^{\frac{2}{4}}$ と $16^{\frac{1}{2}}$ は同じ値になるか答えなさい。

(2) $0^{\frac{3}{2}}$ の値を求めなさい。

(3) 0^0 と 0^{-1} について、本講で定義するかしないかを答えなさい。

演習問題の解答・解説**演習 1：偶数乗根の主根と方程式の解の解説**

(1) $x^2 = 9$ は、2 乗して 9 になる数を探す。

$3^2 = 9$ 、 $(-3)^2 = 9$ より、実数解は $x = 3, -3$ である。

(2) $\sqrt{9}$ は平方根のうち 0 以上の値を表す。

したがって、 $\sqrt{9} = 3$ である。

(3)

方程式の解は、条件を満たすすべての数を求めるため、正負の両方を含む場合がある。

一方、 $\sqrt{9}$ は主根だけを表す記号であり、負の値を含まない。

$\sqrt{9}$ の値は 3 だけであり、 $\sqrt{9} = \pm 3$ とするのは誤りである。

一方、方程式 $x^2 = 9$ の全解は $x = 3, -3$ であり、これは $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ と表すことができる。

根号の値を求めることと、方程式の解をすべて求めることは区別する必要がある。

演習 2：奇数乗根と負の数の解説

(1) $(-3)^3 = -27$ より、 $\sqrt[3]{-27} = -3$ である。

(2) $(-2)^5 = -32$ より、 $\sqrt[5]{-32} = -2$ である。

奇数乗では、負の数を奇数回掛けると負の値になる。そのため、負の数にも実数の範囲で奇数乗根が存在する。

負の実数を偶数回掛けると正の数になるため、この違いが生じる。

演習 3：偶数乗根が存在しない場合の解説

(1) $\sqrt{-4}$ は実数の範囲では存在しない。

(2)

実数を 2 乗すると必ず 0 以上になる。

したがって、どの実数 x についても $x^2 = -4$ を満たすことはできない。

偶数乗根では、根号内が負の場合、実数の範囲では考えられない。

演習 4：有理数指数の定義の解説

(1)

指数の分母 5 を見ると、5 乗根を使う。

$$\begin{aligned} 32^{\frac{2}{5}} &= \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

したがって、 $32^{\frac{2}{5}} = 4$ である。

(2)

指数の分母 4 を見ると、4 乗根を使う。

$$\begin{aligned} 81^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{81} \\ &= 3 \end{aligned}$$

したがって、 $81^{\frac{1}{4}} = 3$ である。

分母は何乗根を使うかを表し、分子はその後何乗するかを表す。

演習 5：負の有理数指数の解説

(1)

負指数は逆数を表す。

$$25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}}$$

ここで、 $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ より、 $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$ である。

(2)

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

正の指数部分を計算する。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} &= \left(\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

したがって、次のようになる。

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

負号は指数全体にかかり、逆数を取る意味になる。

演習 6：分数を底とする有理数指数の解説

分数を底にする場合も、正の底として有理数指数の定義を使う。

まず、指数の分母 3 を見るため、3 乗根を考える。

$$\begin{aligned}\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{\frac{64}{125}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

したがって、 $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}$ である。

先に根を求め、その後に分子の回数だけ累乗する。

演習 7：平方根と絶対値の解説

(1) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ である。

根号 $\sqrt{(-7)^2}$ が表す値は非負の主平方根であるため、結果は -7 ではなく 7 になる。

(2) $x \geq 0$ のとき、 x は 0 以上であるため、 $\sqrt{x^2} = x$ となる。

$x < 0$ のとき、 x^2 の主平方根は x ではなく、正の値である $-x$ になる。また、 $x = 0$ のときも $\sqrt{x^2} = 0$ である。

これは、 $\sqrt{x^2}$ が表す主平方根は 0 以上の値であるためである。

したがって、 $\sqrt{x^2} = |x|$ である。

演習 8：指数表記の同値と 0 の扱いの解説

(1)

指数は約分できる。

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ であるため、 $16^{\frac{2}{4}}$ と $16^{\frac{1}{2}}$ は同じ値になる。

(2)

この講では、 0 の正の有理数乗は 0 として扱う。

したがって、 $0^{\frac{3}{2}} = 0$ である。

(3) 0^0 は本講では定義しない。

また、 0^{-1} は負指数によって逆数を取ると $\frac{1}{0}$ になるため、本講では定義しない。

0 を底とする指数では、指数が正の有理数かどうかを確認する必要がある。