

第 63 講 和事象と排反事象

学習目標

- 2つの事象 A, B について、和事象 $A \cup B$ と共通部分 $A \cap B$ の意味を説明できる。
- 2つの事象に重なりがあるとき、重複を1回引いて確率を求められる。
- 排反事象の意味を理解し、 $A \cap B$ に属する結果がないことを判断できる。
- 排反な2事象では、確率をそのまま加えられることを説明できる。

「A または B」が起こる場合を考える

2つの事象をまとめて考える

公正な6面さいころを1回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」とすると、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

です。

事象 B を「4以上の目が出る」とすると、

$$B = \{4, 5, 6\}$$

です。

「 A または B が起こる」とは、

- 偶数の目が出る
- 4以上の目が出る
- その両方を満たす

のいずれかが起こることです。

この条件を満たす目を重複なく並べると、

$$\{2, 4, 5, 6\}$$

となります。

和事象

事象 A と事象 B の少なくとも一方が起こる事象を、 A と B の**和事象**といい、

$$A \cup B$$

と表します。

和事象の「または」

$A \cup B$ は、

- A だけが起こる
- B だけが起こる
- A と B の両方が起こる

場合をすべて含みます。

日常語の「どちらか一方だけ」という意味には限定されません。

2 つの事象が重なる部分

共通部分

事象 A と事象 B の両方が同時に起こる事象を、 A と B の**共通部分**といい、

$$A \cap B$$

と表します。

集合を列挙して重なりを見る

先ほどのさいころの例では、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

でした。

両方に入っている目は、

$$4, 6$$

です。

したがって、

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

です。

一方、少なくとも一方に入る目は、

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

です。

内容	該当する目
A	2, 4, 6
B	4, 5, 6
$A \cap B$	4, 6
$A \cup B$	2, 4, 5, 6

先に共通部分を確認する

2 つの事象を合わせて数えるときは、まず A と B の両方に入る結果があるか確認します。

重なりがあるのに、 A の場合の数と B の場合の数をそのまま足すと、共通部分を 2 回数えてしまいます。

なぜ共通部分を 1 回引くのか

足すだけでは重複する

さいころの例で、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

なので、 A に属する結果は 3 個です。

また、

$$B = \{4, 5, 6\}$$

なので、 B に属する結果も 3 個です。
そのまま、

$$3 + 3 = 6$$

とすると、4 と 6 をそれぞれ 2 回ずつ数えています。
共通部分、

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

の 2 個を 1 回引けば、

$$3 + 3 - 2 = 4$$

となり、実際の和事象、

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

の 4 個と一致します。

重なりを 1 回だけ戻す

A と B の場合の数を足すと、 $A \cap B$ に属する結果は 2 回数えられます。
そこで、共通部分を 1 回引きます。
この考え方が、和事象の確率の公式につながります。

和事象の確率

和事象の確率

2 つの事象 A, B について、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立ちます。

さいころで公式を確かめる

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

- A : 偶数の目が出る
- B : 4 以上の目が出る

とします。

$A = \{2, 4, 6\}$ なので、

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

です。

$B = \{4, 5, 6\}$ なので、

$$P(B) = \frac{3}{6}$$

です。

また、

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

なので、

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

実際に $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ と列挙しても 4 通りなので、結果が一致します。

重なりがあるならそのまま足さない

$P(A) + P(B)$ とするだけでよいのは、 A と B に共通する結果がない場合です。
共通部分がある場合は、

$$P(A \cap B)$$

を 1 回引く必要があります。

排反事象

排反事象

2 つの事象 A, B が同時には起こらないとき、 A と B は**排反事象**であるといいます。
このとき、 $A \cap B$ に属する結果は 1 つもありません。

排反な例

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

- A : 「1 または 2 の目が出る」
- B : 「5 または 6 の目が出る」

とすると、

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

です。

両方に含まれる目はありません。

したがって、 A と B は排反です。

排反かどうかは共通部分を見る

2 つの事象が排反かどうかを判断するときは、両方を同時に満たす結果があるか確認します。

- 共通する結果がない → 排反
 - 共通する結果がある → 排反ではない
- と判断します。

排反なら確率をそのまま加える

引く重なりが 0 になる

A と B が排反なら、 $A \cap B$ に属する結果はありません。
したがって、

$$P(A \cap B) = 0$$

です。
和事象の公式、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

に代入すると、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となります。

排反事象の和の確率

事象 A, B が排反であるとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

です。

排反か確認してから加える

「 A または B 」と書かれているだけで、確率をすぐに足してはいけません。

先に、

A と B が同時に起こることがあるか

を確認します。

同時に起こる場合があれば排反ではないので、共通部分を引きます。

排反な場合と排反でない場合を比べる

同じ「または」でも計算が変わる

公正な 6 面さいころを 1 回投げる場合を比べます。

事象 A	事象 B	共通する目	排反か
偶数 $\{2, 4, 6\}$	4 以上 $\{4, 5, 6\}$	4, 6	排反ではない
2 以下 $\{1, 2\}$	5 以上 $\{5, 6\}$	なし	排反

最初の組では重なりがあるため、その重なりを 1 回引きます。

2 つ目の組では重なりがないため、確率をそのまま足せます。

和事象の確率を求める手順

1. 事象 A に属する結果を確認する。
2. 事象 B に属する結果を確認する。
3. 両方に属する結果、つまり $A \cap B$ を確認する。
4. 重なりがあれば $P(A \cap B)$ を 1 回引く。
5. 重なりがなければ排反なので、そのまま加える。

例題

例題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」、事象 B を「3 以上の目が出る」とします。

$A \cup B$ 、 $A \cap B$ をそれぞれ集合で表し、 $P(A \cup B)$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

それぞれの事象は、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

です。

少なくとも一方に属する目は、

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

です。

両方に属する目は、

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

です。

したがって、

$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{4}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

です。

よって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

です。

例題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「2 以下の数を選ぶ」、事象 B を「7 以上の数を選ぶ」とします。

A と B が排反であることを確認し、 $P(A \cup B)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

事象は、

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{7, 8\}$$

です。

共通する結果はないので、 A と B は排反です。

したがって、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

です。

よって、

$$P(A \cup B) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

です。

例題 3

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「3 の倍数の目が出る」、事象 B を「偶数の目が出る」とします。

ある生徒は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

としました。

この計算で確認不足な点を説明し、正しい確率を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

まず、2 つの事象が排反かどうかを確認する必要があります。

$$A = \{3, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

なので、6 が両方に含まれます。

したがって、

$$A \cap B = \{6\}$$

であり、 A と B は排反ではありません。

よって、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

を使います。

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

演習問題

練習問題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「2 以下の目が出る」、事象 B を「偶数の目が出る」とします。

$A \cup B$ と $A \cap B$ をそれぞれ集合で表しなさい。

練習問題 2

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「奇数の目が出る」、事象 B を「4 以上の目が出る」とします。

$P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 3

1, 2, 3, 4, 5, 6 と書かれた 6 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「1 または 2 を選ぶ」、事象 B を「5 または 6 を選ぶ」とします。

A と B が排反であることを確認し、 $P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 4

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「3 以下の目が出る」、事象 B を「3 以上の目が出る」とします。

A と B は排反ですか。また、 $P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 5

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 と書かれた 9 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「3 の倍数を選ぶ」、事象 B を「5 以上の数を選ぶ」とします。

$P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 6

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「1 の目が出る」、事象 B を「6 の目が出る」とします。

(1) A と B が排反である理由を説明しなさい。

(2) $P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 7

ある試行で、

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

であるとします。

$P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 8

ある試行で、事象 A と事象 B は排反で、

$$P(A) = \frac{2}{7}, \quad P(B) = \frac{3}{7}$$

です。

$P(A \cup B)$ を求めなさい。

練習問題 9

ある生徒は、公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、

- A : 「偶数の目が出る」
- B : 「5 以上の目が出る」

として、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

としました。

誤りを説明し、正しい確率を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

事象 A は、

$$A = \{1, 2\}$$

です。

事象 B は、

$$B = \{2, 4, 6\}$$

です。

少なくとも一方に属する結果は、

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

です。

両方に属する結果は、

$$A \cap B = \{2\}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

それぞれ、

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

です。

共通部分は、

$$A \cap B = \{5\}$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

事象は、

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

です。

共通するカードはないので、 A と B は排反です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

事象は、

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

です。

3 が両方に含まれるので、 A と B は排反ではありません。

共通部分は、

$$A \cap B = \{3\}$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

事象 A は、

$$A = \{3, 6, 9\}$$

です。

事象 B は、

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

です。

共通部分は、

$$A \cap B = \{6, 9\}$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 1 回のさいころ投げで、1 の目と 6 の目が同時に出ることはありません。

したがって、 A と B に共通する結果はなく、排反です。

(2) 排反なので、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

和事象の確率の公式より、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

です。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

A と B は排反なので、共通する結果はありません。

したがって、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

より、

$$P(A \cup B) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

事象は、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

です。

6 が両方に含まれるため、 A と B は排反ではありません。

そのまま確率を足すと、6 の目が出る場合を 2 回数えてしまいます。

したがって、

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

です。