

第 75 講 平面・空間における点の位置の表し方

学習目標

- ・ 数直線上の点の位置を 1 つの座標で表せる。
- ・ 平面上の点を順序対 (x, y) で表し、 x 座標と y 座標を正しく読み取れる。
- ・ 座標軸上の点と第 1 象限から第 4 象限までの点を区別できる。
- ・ 空間内の点を順序組 (x, y, z) で表し、3 つの座標の順序を正しく読み取れる。
- ・ 座標の符号や 0 に注目して、点のおおよその位置を判断できる。

数で位置を表す

位置を数字に置き換える

点の位置を言葉だけで表すと、「右の方」「少し上」のように曖昧になることがある。

そこで、基準となる点や向きを決め、位置を数で表す方法を考える。

一直線上では 1 つの数、平面上では 2 つの数、空間内では 3 つの数を使う。

このように数を用いて位置を表すことで、点の位置を正確に指定できる。

必要な数の個数

- ・ 数直線上の点：1 つの数
- ・ 平面上の点：2 つの数
- ・ 空間内の点：3 つの数

場所が広がるにつれて、位置を指定するために必要な数も増える。

数直線上の座標

数直線上の座標

数直線上で基準となる点を 0 とし、正の向きを決める。

点 P が表す数を a とするとき、 a を点 P の座標という。

正・負・0 で位置を読む

通常の数直線では、0 より右側を正、左側を負として考える。

たとえば、

- ・ 座標が 4 の点は 0 より右側
- ・ 座標が -3 の点は 0 より左側
- ・ 座標が 0 の点は原点

に位置する。

したがって、座標の符号を見るだけでも、点が原点のどちら側にあるか判断できる。

原点

座標が 0 である基準の点を原点という。

数直線では 1 つの数で決まる

数直線上では、点の位置は 1 つの座標だけで決まる。
たとえば「座標 -5 の点」と指定されれば、その位置は 1 つに決まる。

平面では 2 つの数を使う

横と縦の位置を組み合わせる

平面上では、1 つの数だけでは点の位置を決められない。
そこで、互いに直交する 2 本の数直線を使う。
横方向の数直線を x 軸、縦方向の数直線を y 軸という。
2 つの軸が交わる点を原点 O とする。
平面上の点は、

$$(x, y)$$

という 2 つの数の組で表す。

平面上の座標

平面上の点 P の位置を、

$$P(x, y)$$

と表す。
最初の数 x を x 座標、2 番目の数 y を y 座標という。
 (x, y) のように順序をもつ 2 数の組を **順序対** という。

座標の順序を入れ替えない

$(2, 5)$ と $(5, 2)$ は一般に異なる点を表す。
 $(2, 5)$ では x 座標が 2、 y 座標が 5 である。
座標は必ず、

$$(x, y)$$

の順に読む。

平面上の座標から位置を読む

符号を見れば方向が分かる

点 $P(3, 2)$ を考える。
 x 座標が正なので原点より右側、 y 座標も正なので原点より上側にある。
点 $Q(-4, 3)$ では、 x 座標が負なので左側、 y 座標が正なので上側にある。
このように、座標の符号から点の位置を大まかに判断できる。

座標	横方向	縦方向
$(3, 2)$	右	上
$(-4, 3)$	左	上
$(-2, -5)$	左	下
$(6, -1)$	右	下

座標軸上の点

座標が 0 なら軸上にある

平面上の点 $P(x, y)$ について、どちらかの座標が 0 の場合を考える。

$P(4, 0)$ では y 座標が 0 なので、点は x 軸上にある。

$Q(0, -3)$ では x 座標が 0 なので、点は y 軸上にある。

$(0, 0)$ は 2 つの座標がともに 0 なので原点である。

軸上の点の特徴

- $(a, 0)$ は x 軸上の点
- $(0, b)$ は y 軸上の点
- $(0, 0)$ は原点

座標に 0 があるときは、どの軸上にあるかを確認するとよい。

象限

象限

x 軸と y 軸によって平面は 4 つの部分に分けられる。

これらを順に、第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限という。

座標の符号で象限を判断する

各象限では、 x 座標と y 座標の符号が決まっている。

象限	x 座標	y 座標
第 1 象限	正	正
第 2 象限	負	正
第 3 象限	負	負
第 4 象限	正	負

たとえば $(-3, 5)$ は x 座標が負、 y 座標が正なので第 2 象限にある。

$(4, -2)$ は x 座標が正、 y 座標が負なので第 4 象限にある。

座標軸上の点はどの象限にも属さない

$(3, 0)$ や $(0, -5)$ のような座標軸上の点は、どの象限にも属さない。

原点 $(0, 0)$ も、どの象限にも属さない。

座標から点の特徴を読む

数値を見て位置を整理する

点の座標からは、図を描かなくても位置の特徴を読み取れる。

たとえば点 $A(-6, 0)$ では、

- x 座標は負
- y 座標は 0

なので、 x 軸上で原点より左側にある。

点 $B(0, 7)$ では、

- x 座標は 0

- y 座標は正
- なので、 y 軸上で原点より上側にある。

平面の位置を読む手順

1. x 座標の符号を見る。
2. y 座標の符号を見る。
3. 0 があれば座標軸上か原点かを判断する。
4. どちらも 0 でなければ、符号の組から象限を判断する。

空間では 3 つの数を使う

平面にもう 1 つの方向を加える

空間では、平面の 2 方向だけでは点の位置を決められない。
そこで、 x 軸、 y 軸に加えて、3 つ目の z 軸を考える。
空間内の点は、

$$(x, y, z)$$

という 3 つの数の組で表す。

空間内の座標

空間内の点 P の位置を、

$$P(x, y, z)$$

と表す。

x を x 座標、 y を y 座標、 z を z 座標という。

(x, y, z) のように順序をもつ 3 数の組を**順序組**という。

空間でも順序が重要

空間の座標は必ず、

$$(x, y, z)$$

の順に読む。

たとえば、

$$(2, -1, 4)$$

では、

- x 座標は 2
- y 座標は -1
- z 座標は 4

である。

3 つの数を入れ替えない

$(1, 2, 3)$ 、 $(2, 1, 3)$ 、 $(3, 2, 1)$ は一般に異なる点を表す。

同じ 3 つの数字を使っている、並ぶ順序が変われば位置も変わる。

空間で座標が 0 になる場合

0 の個数から位置の特徴を読む

空間内の点についても、座標が 0 であることには意味がある。
たとえば、

$$P(5, 0, 0)$$

は x 座標だけが 0 でないので、 x 軸上にある。
同様に、

$$Q(0, -3, 0)$$

は y 軸上にあり、

$$R(0, 0, 4)$$

は z 軸上にある。
また、

$$O(0, 0, 0)$$

は空間における原点である。

空間の原点

空間でも原点は、

$$(0, 0, 0)$$

で表す。

3 つの座標がすべて 0 である点が原点である。

平面と空間の違いを整理する

座標の個数に注目する

平面と空間では、点の表し方が次のように異なる。

場所	点の表し方	座標の個数
数直線	$P(a)$	1
平面	$P(x, y)$	2
空間	$P(x, y, z)$	3

ただし、どの場合でも共通しているのは、決められた順序で数を並べて位置を指定するという考え方である。

この講では距離を求めない

この講の中心は、座標を使って点の位置を表し、読み取ることである。

2 点間の距離を求める公式や、座標から図形の式を作る方法は扱わない。

例題

例題 1

平面上の点について、次の問いに答えよ。

$$A(4, 3), \quad B(-2, 5), \quad C(-3, -1), \quad D(6, -4)$$

- (1) 各点が第何象限にあるか答えよ。
- (2) B の x 座標と y 座標を答えよ。

例題 1 の解答・解説

(1)

$A(4, 3)$ は x 座標、 y 座標ともに正なので第 1 象限にある。

$B(-2, 5)$ は x 座標が負、 y 座標が正なので第 2 象限にある。

$C(-3, -1)$ は両方とも負なので第 3 象限にある。

$D(6, -4)$ は x 座標が正、 y 座標が負なので第 4 象限にある。

したがって、

- ・ A : 第 1 象限
- ・ B : 第 2 象限
- ・ C : 第 3 象限
- ・ D : 第 4 象限

である。

(2) $B(-2, 5)$ の x 座標は -2 、 y 座標は 5 である。

例題 2

平面上の点、

$$P(-5, 0), \quad Q(0, 4), \quad R(0, 0)$$

について、それぞれの位置を「 x 軸上」「 y 軸上」「原点」のいずれかを用いて説明せよ。

例題 2 の解答・解説

$P(-5, 0)$ は y 座標が 0 なので x 軸上にある。

$Q(0, 4)$ は x 座標が 0 なので y 軸上にある。

$R(0, 0)$ は両方の座標が 0 なので原点である。

例題 3

空間内の点、

$$A(2, -3, 5), \quad B(0, 4, 0), \quad C(0, 0, -6)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) A の x 座標、 y 座標、 z 座標を答えよ。
- (2) B はどの座標軸上にあるか。
- (3) C はどの座標軸上にあるか。

例題 3 の解答・解説

- (1) $A(2, -3, 5)$ なので、 x 座標は 2、 y 座標は -3 、 z 座標は 5 である。
(2) $B(0, 4, 0)$ は y 座標だけが 0 でないので、 y 軸上にある。
(3) $C(0, 0, -6)$ は z 座標だけが 0 でないので、 z 軸上にある。

演習問題

練習問題 1

数直線上の点 A の座標が -4 である。
点 A は原点の右側と左側のどちらにあるか答えよ。

練習問題 2

平面上の点 $P(5, -2)$ について、 x 座標と y 座標を答え、点 P が第何象限にあるか答えよ。

練習問題 3

次の各点が第何象限にあるか答えよ。

$$A(-4, 7), \quad B(-6, -2), \quad C(3, -8), \quad D(2, 9)$$

練習問題 4

次の点のうち、 x 軸上にあるものをすべて選べ。

$$A(3, 0), \quad B(0, 3), \quad C(-5, 0), \quad D(2, 2)$$

練習問題 5

次の点のうち、どの象限にも属さないものをすべて選べ。

$$A(4, 1), \quad B(0, -2), \quad C(-3, 5), \quad D(6, 0), \quad E(0, 0)$$

練習問題 6

平面上の点 P は第 3 象限にあり、 x 座標が -7 、 y 座標が -4 である。
点 P の座標を表せ。

練習問題 7

空間内の点 $Q(-2, 5, 7)$ について、 x 座標、 y 座標、 z 座標をそれぞれ答えよ。

練習問題 8

空間内の次の点について、 x 軸上、 y 軸上、 z 軸上、原点のいずれにあるか答えよ。

$$A(-8, 0, 0), \quad B(0, 0, 3), \quad C(0, -4, 0), \quad D(0, 0, 0)$$

練習問題 9

ある生徒は、平面上の点 $A(-2, 6)$ と $B(6, -2)$ について、「使われている 2 つの数が同じなので同じ点である」と述べた。
この考えの誤りを説明せよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

点 A の座標は -4 である。
負の座標をもつ点は原点より左側にある。
したがって、点 A は原点の左側にある。

練習問題 2 の解答・解説

$P(5, -2)$ なので、 x 座標は 5 、 y 座標は -2 である。
 x 座標が正、 y 座標が負なので、第 4 象限にある。

練習問題 3 の解答・解説

$A(-4, 7)$ は x 座標が負、 y 座標が正なので第 2 象限である。
 $B(-6, -2)$ は両方が負なので第 3 象限である。
 $C(3, -8)$ は x 座標が正、 y 座標が負なので第 4 象限である。
 $D(2, 9)$ は両方が正なので第 1 象限である。
したがって、
・ A ：第 2 象限
・ B ：第 3 象限
・ C ：第 4 象限
・ D ：第 1 象限
である。

練習問題 4 の解答・解説

x 軸上の点では、 y 座標が 0 になる。
 $A(3, 0)$ と $C(-5, 0)$ は y 座標が 0 である。
したがって、 x 軸上にある点は A, C である。

練習問題 5 の解答・解説

座標軸上の点と原点は、どの象限にも属さない。
 $B(0, -2)$ は y 軸上、 $D(6, 0)$ は x 軸上、 $E(0, 0)$ は原点である。
したがって、どの象限にも属さない点は B, D, E である。

練習問題 6 の解答・解説

x 座標が -7 、 y 座標が -4 なので、

$$P(-7, -4)$$

である。

両方の座標が負なので、第 3 象限という条件にも合っている。

練習問題 7 の解答・解説

空間の座標は、

$$(x, y, z)$$

の順で読む。

したがって、 $Q(-2, 5, 7)$ の x 座標は -2 、 y 座標は 5 、 z 座標は 7 である。

練習問題 8 の解答・解説

$A(-8, 0, 0)$ は x 座標だけが 0 でないので、 x 軸上にある。

$B(0, 0, 3)$ は z 座標だけが 0 でないので、 z 軸上にある。

$C(0, -4, 0)$ は y 座標だけが 0 でないので、 y 軸上にある。

$D(0, 0, 0)$ は 3 つの座標がすべて 0 なので原点である。

練習問題 9 の解答・解説

平面上の座標は順序対であり、数を並べる順序に意味がある。

$A(-2, 6)$ では x 座標が -2 、 y 座標が 6 である。

一方、 $B(6, -2)$ では x 座標が 6 、 y 座標が -2 である。

したがって、2 つの点は異なる位置を表す。

同じ 2 つの数を使っているとしても、順序を入れ替えれば一般に別の点になる。