第 224 講 ベクトルの大きさ

学習目標

- ベクトルの大きさを、矢印の長さとして説明できる。
- 成分表示されたベクトルの大きさの公式を、三平方の定理から導ける。
- 2 点の座標から、その 2 点を結ぶベクトルの大きさを求められる。
- 0 でないベクトルと同じ向きの単位ベクトルを求められる。
- 大きさに関する方程式を立て、未知数を求められる。

1. ベクトルの大きさとは

矢印の長さ

ベクトル $\vec{a}$ の大きさとは、$\vec{a}$ を表す矢印の長さである。ベクトル $\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ と書く。
ベクトルは向きと大きさをもつ量であるが、$|\vec{a}|$ は長さを表す数であり、向きをもたない。そのため、常に $|\vec{a}| \geq 0$ である。

大きさが 0 になる場合

零ベクトル $\vec{0}$ は始点と終点が一致するので、$|\vec{0}| = 0$ である。逆に、大きさが 0 であるベクトルは零ベクトルだけである。

2. 成分から大きさを求める

横と縦から斜辺を求める

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ を原点 O から点 $A(a_1, a_2)$ への矢印として表す。点 $H(a_1, 0)$ をとると、OH は横の変化、HA は縦の変化を表す。OH と HA は直交するので、$a_1 \neq 0$ かつ $a_2 \neq 0$ のとき、三角形 OHA は直角三角形である。図は $a_1 > 0$、$a_2 > 0$ の場合を表している。

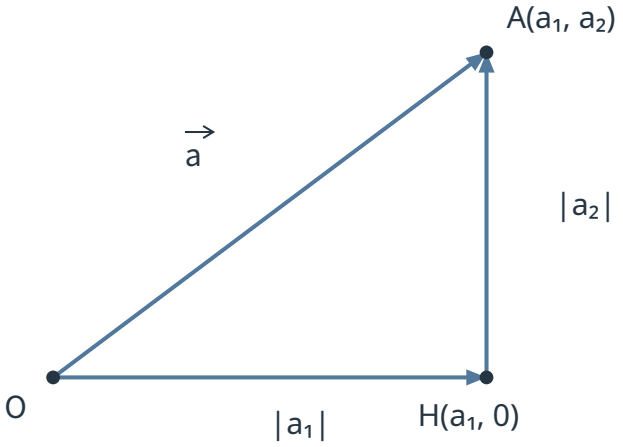


図 1　成分 (a_1, a_2) とベクトルの大きさの関係

横の辺の長さは $|a_1|$、縦の辺の長さは $|a_2|$、斜辺の長さは $|\vec{a}|$ である。三平方の定理より、

$$|\vec{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

となる。大きさは負でないので、この等式の 0 以上の平方根をとる。$a_1 = 0$ または $a_2 = 0$ の場合は図形が線分に退化するが、同じ式が成り立つ。

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ のとき、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

である。各成分が負であっても、2 乗してから加える。

成分をそのまま足さない

大きさは $|a_1| + |a_2|$ ではない。例えば、$(3, 4)$ の大きさは $3 + 4 = 7$ ではなく、$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ である。横と縦は直交する 2 辺なので、三平方の定理を使う。

3. 符号や実数倍と大きさ

向きを逆にしても大きさは同じ

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ に対し、$-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ であるから、

$$|-\vec{a}| = \sqrt{(-a_1)^2 + (-a_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\vec{a}|$$

である。向きが反対でも、矢印の長さは変わらない。

実数倍したベクトルの大きさ

実数 k に対して、$k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$ である。したがって、

$$|k\vec{a}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$$

である。$k < 0$ のときも大きさは負にならないため、係数には絶対値が付く。

4. 2 点間の長さとの関係

終点から始点を引いてから大きさを求める

点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ に対して、$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ である。よって、線分 AB の長さはベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさに等しく、

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

となる。

©ミライコーチング

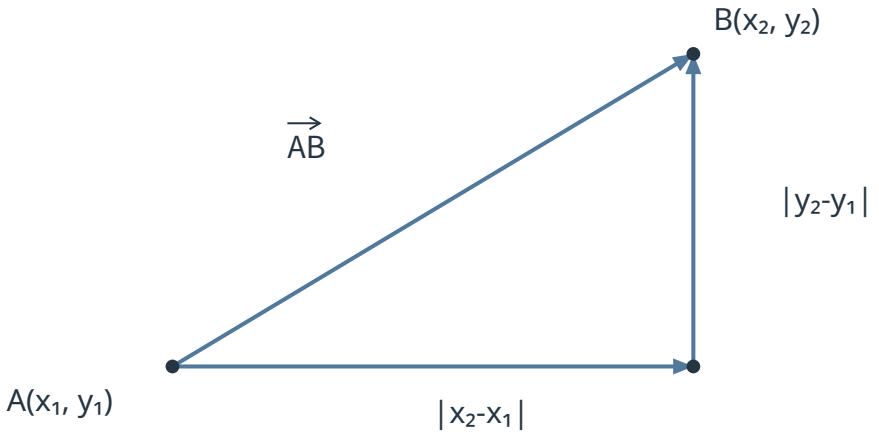


図 2　2 点間の横と縦の差が直角三角形の 2 辺になる

順序を逆にしても長さは同じ

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ なので、$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|$ である。2 点間の長さは、どちらの点を始点に選んでも同じである。

5. 単位ベクトル

大きさが 1 のベクトル

大きさが 1 であるベクトルを単位ベクトルという。$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき、$\vec{a}$ をその大きさ $|\vec{a}|$ で割った

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

は、$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである。実際、

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

となる。

零ベクトルは大きさで割れない

$\vec{0}$ では $|\vec{0}| = 0$ であるため、$\frac{\vec{0}}{|\vec{0}|}$ は定義できない。大きさで割って単位ベクトルを作れるのは、0 でないベクトルだけである。

6. 例題

例題 1：成分から大きさを求める

$\vec{a} = (-5, 12)$ の大きさを求めよ。

例題 1 の解答・解説

各成分を 2 乗して加えるので、

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

である。第 1 成分が負でも、大きさは正である。

例題 2：2 点を結ぶベクトルの大きさ

点 $P(-2, 1)$、$Q(4, -7)$ に対して、$|\overrightarrow{PQ}|$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

まず、終点から始点を引いて成分を求める。

$$\overrightarrow{PQ} = (4 - (-2), -7 - 1) = (6, -8)$$

したがって、

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

である。

例題 3：大きさから未知数を求める

$\vec{a} = (x, 4)$、$|\vec{a}| = 5$ のとき、実数 x を求めよ。

例題 3 の解答・解説

大きさの公式から、

$$\sqrt{x^2 + 4^2} = 5$$

である。両辺は負でないので 2 乗して、$x^2 + 16 = 25$、すなわち $x^2 = 9$ となる。よって、

$$x = \pm 3$$

である。成分の符号は大きさだけでは 1 つに決まらない。

例題 4：同じ向きの単位ベクトル

$\vec{a} = (3, -4)$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

©ミライコーチング

例題 4 の解答・解説

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ である。したがって、求める単位ベクトルは、

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

である。確認すると、その大きさは $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ である。

7. 演習問題

演習 1：基本的な大きさ

次のベクトルの大きさを求めよ。
(1) $\vec{a} = (6, 8)$
(2) $\vec{b} = (-7, -24)$

演習 2：零ベクトルと座標軸上のベクトル

次のベクトルの大きさを求めよ。
(1) $\vec{0} = (0, 0)$
(2) $\vec{c} = (0, -9)$

演習 3：2 点間の長さ

点 $A(2, -3)$、$B(-4, 5)$ に対して、$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

演習 4：逆ベクトルと大きさ

$\vec{a} = (3, -4)$ のとき、$|-\vec{a}|$ を求めよ。

演習 5：実数倍と大きさ

$\vec{a} = (-2, 1)$ のとき、$|3\vec{a}|$ を求めよ。

演習 6：大きさに関する方程式

$\vec{p} = (t, -6)$、$|\vec{p}| = 10$ のとき、実数 t を求めよ。

演習 7：点の座標を求める

点 $A(1, 2)$、$B(x, 6)$ が $|\overrightarrow{AB}| = 5$ を満たすとき、実数 x を求めよ。

演習 8：単位ベクトル

$\vec{a} = (-1, 2)$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

©ミライコーチング

8. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$ である。
(2) $|\vec{b}| = \sqrt{(-7)^2+(-24)^2} = \sqrt{625} = 25$ である。

演習 2 の解答・解説

(1) $|\vec{0}| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$ である。
(2) $|\vec{c}| = \sqrt{0^2+(-9)^2} = 9$ である。座標軸上のベクトルでは、0 でない成分の絶対値が大きさになる。

演習 3 の解答・解説

まず、

$$\overrightarrow{AB} = (-4-2, 5-(-3)) = (-6, 8)$$

である。したがって、

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$$

である。

演習 4 の解答・解説

$-\vec{a} = (-3, 4)$ なので、

$$|-\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

である。これは $|\vec{a}|$ と等しい。

演習 5 の解答・解説

$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$ である。$|3\vec{a}| = |3|\,|\vec{a}|$ より、

$$|3\vec{a}| = 3\sqrt{5}$$

である。実際、$3\vec{a} = (-6, 3)$ として計算しても $\sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$ となる。

演習 6 の解答・解説

大きさの公式から、$\sqrt{t^2+(-6)^2} = 10$ である。両辺を 2 乗すると、

$$t^2 + 36 = 100$$

となる。よって、$t^2 = 64$ から $t = \pm 8$ である。

演習 7 の解答・解説

$\overrightarrow{AB} = (x-1, 6-2) = (x-1, 4)$ である。したがって、

$$\sqrt{(x-1)^2+4^2} = 5$$

である。両辺を 2 乗すると $(x-1)^2 = 9$ なので、$x-1 = \pm 3$ である。よって、

$$x = 4,\ -2$$

である。

演習 8 の解答・解説

$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ である。したがって、求める単位ベクトルは、

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

である。この成分は $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ と表してもよい。

©ミライコーチング