

GOAL この講でできるようになること

- ・ 因数分解が展開の逆向きの変形であることを説明できる。
- ・ 複数の項に共通して含まれる数や文字を見つけられる。
- ・ 共通因数を括弧の外へ出して因数分解できる。
- ・ 数と文字の両方を共通因数として取り出せる。
- ・ 因数分解した式を展開して、元の式に戻るか確認できる。

EXPLANATION / 解説 因数分解は展開を逆向きに見る
これまで、分配法則を使って次のような展開をしました。

$$3(x+2) = 3x+6$$

この式を右から左へ見ると、

$$3x+6 = 3(x+2)$$

となります。

$3x$ と 6 の両方に含まれている 3 を外へ取り出した形です。
このように、和の形の式を積の形へ変形することを**因数分解**といいます。
展開が「積の形から和の形へ進む計算」なら、因数分解は「和の形から積の形へ戻る計算」です。

DEFINITION 因数と因数分解

積を作っている 1 つ 1 つの式や数を**因数**といいます。
例えば、

$$3(x+2)$$

では、 3 と $x+2$ が因数です。
また、

$$6x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x$$

と考えれば、 2 、 3 、 x などとも積を作る因数です。
多項式をいくつかの因数の積として表すことを**因数分解する**といいます。

EXPLANATION / 解説 最初に探すのは全項に共通するもの

$6x+9$ を因数分解してみます。
 $6x$ と 9 の両方は 3 で割り切れます。
そこで、

$$\begin{aligned} 6x+9 &= 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3 \\ &= 3(2x+3) \end{aligned}$$

となります。
この 3 のように、すべての項に共通して含まれている因数を**共通因数**といいます。
因数分解を始めるときは、いきなり公式を探すのではなく、**まずすべての項に共通する因数がないかを確認**します。

POINT 共通因数を取り出す手順

共通因数による因数分解は、次の順に進めます。

1. すべての項に共通する数を探す。
 2. すべての項に共通する文字を探す。
 3. 共通する部分を括弧の外へ出す。
 4. 各項を共通因数で割った結果を括弧の中へ書く。
 5. 展開して元の式へ戻るか確認する。
- 例えば、 $8x^2+12x$ では、数の共通因数は 4 、文字の共通因数は x なので、 $4x$ を取り出せます。

EXPLANATION / 解説 文字も共通因数になる

$8x^2+12x$ を考えます。
 $8x^2$ と $12x$ の両方に $4x$ が含まれています。

$$\begin{aligned} 8x^2+12x &= 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3 \\ &= 4x(2x+3) \end{aligned}$$

ここで x^2 から x を 1 つ取り出すと、括弧の中には x が 1 つ残ります。

$$x^2 = x \cdot x$$

だからです。
文字を取り出すときは、各項に共通している個数だけを外へ出します。

CAUTION / 注意 共通していない文字まで出さない

$6x^2 + 9x$ では、両方の項に x が含まれているので x を取り出せます。
一方、 $6x^2 + 9$ では、9 に x が含まれていません。
したがって、 x を共通因数として取り出すことはできません。
共通因数は、すべての項に掛けられているものだけです。

EXPLANATION / 解説 できるだけ大きな共通因数を取り出す

$12x^2 + 18x$ では、 $2x$ を取り出して

$$12x^2 + 18x = 2x(6x + 9)$$

としても、式としては正しいです。
しかし、括弧の中の $6x$ と 9 には、まだ共通因数 3 があります。
最初から最大の共通因数 $6x$ を取り出せば、

$$12x^2 + 18x = 6x(2x + 3)$$

となり、これ以上共通因数を取り出す必要がありません。
因数分解では、通常、すべての項に共通するものをできるだけまとめて取り出すと式がすっきりします。

EXPLANATION / 解説 マイナスを取り出すこともできる

$-3x + 6$ から -3 を共通因数として取り出すと、

$$-3x + 6 = -3(x - 2)$$

となります。
確認すると、

$$-3(x - 2) = -3x + 6$$

なので元の式へ戻ります。
負の数を取り出したときは、括弧内の各項の符号が変わることに注意します。

POINT 迷ったら展開して確認する

因数分解した式が正しいか不安なときは、展開して確認できます。
例えば、

$$6x(2x - 3)$$

を展開すると、

$$6x(2x - 3) = 12x^2 - 18x$$

です。
元の式と一致すれば、因数分解は正しくできています。
因数分解と展開は逆向きの操作なので、互いに答えを確認する方法として使えます。

例題 1 EXERCISE

$8x + 12$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題 1 の解答・解説

$8x$ と 12 の両方に共通する最大の数は 4 です。
そこで 4 を取り出します。

$$\begin{aligned} 8x + 12 &= 4 \cdot 2x + 4 \cdot 3 \\ &= 4(2x + 3) \end{aligned}$$

したがって、 $8x + 12 = 4(2x + 3)$ です。
展開すると $4 \cdot 2x + 4 \cdot 3 = 8x + 12$ となり、元の式へ戻ることも確認できます。

例題 2 EXERCISE

$10x^2 - 15x$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題 2 の解答・解説

数については 10 と 15 に 5 が共通しています。
文字については x^2 と x に x が共通しています。
したがって、共通因数は $5x$ です。

$$\begin{aligned} 10x^2 - 15x &= 5x \cdot 2x - 5x \cdot 3 \\ &= 5x(2x - 3) \end{aligned}$$

したがって、 $10x^2 - 15x = 5x(2x - 3)$ です。
 x^2 から x を 1 つ取り出したあと、括弧の中には x が 1 つ残ります。

例題 3 EXERCISE

$12a^2b + 8ab^2$ を因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題 3 の解答・解説

数では 12 と 8 に 4 が共通しています。
文字では、両方の項に a と b が少なくとも 1 つずつ含まれています。
したがって、 $4ab$ を共通因数として取り出します。

$$\begin{aligned} 12a^2b + 8ab^2 &= 4ab \cdot 3a + 4ab \cdot 2b \\ &= 4ab(3a + 2b) \end{aligned}$$

したがって、 $12a^2b + 8ab^2 = 4ab(3a + 2b)$ です。
文字が複数ある場合も、それぞれについて全項に共通している部分を探します。

例題 4 EXERCISE

$-6x^2 + 9x$ を、括弧内の x^2 の係数が正になるように因数分解しなさい。

ANSWER / 解答 例題 4 の解答・解説

6 と 9 の最大の共通因数は 3 で、両方の項に x も共通しています。
先頭の項を括弧内で正にするため、 $-3x$ を取り出します。

$$\begin{aligned} -6x^2 + 9x &= -3x \cdot 2x + (-3x)(-3) \\ &= -3x(2x - 3) \end{aligned}$$

したがって、 $-6x^2 + 9x = -3x(2x - 3)$ です。
負の共通因数を取り出すと、括弧内の各項の符号が反対になります。

SECTION 1 演習問題

練習問題 1 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $6x + 9$
- (2) $10a - 15$
- (3) $14x + 21$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $4x^2 + 6x$
- (2) $15a^2 - 10a$
- (3) $12x^3 + 18x^2$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $8ab + 12a$
- (2) $18x^2y - 12xy$
- (3) $15a^2b + 20ab^2$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を因数分解しなさい。

- (1) $9x^2 - 12x + 6$
- (2) $14a^2 + 21a - 7$
- (3) $8x^3 + 12x^2 - 4x$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を、括弧内の最高次の項の係数が正になるように因数分解しなさい。

- (1) $-4x + 8$
- (2) $-6x^2 + 15x$
- (3) $-12a^2 - 18a$

練習問題 6 EXERCISE

$12x^2 + 20x$ を因数分解します。

次のうち、共通因数をできるだけ取り出した形を 1 つ選びなさい。

- ・ ア $2x(6x + 10)$
- ・ イ $4x(3x + 5)$
- ・ ウ $4(3x^2 + 5x)$
- ・ エ $x(12x + 20)$

練習問題 7 EXERCISE

ある生徒は、 $18x^2 - 12x$ を次のように因数分解しました。

$$18x^2 - 12x = 6(3x^2 - 2x)$$

この式が数学的に正しいか答えなさい。また、共通因数をできるだけ取り出した形に因数分解しなさい。

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒は、

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3x)$$

と因数分解しました。

誤りを説明し、正しく因数分解しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) 6 と 9 の最大の共通因数は 3 です。

$$6x + 9 = 3(2x + 3)$$

(2) 10 と 15 の最大の共通因数は 5 です。

$$10a - 15 = 5(2a - 3)$$

(3) 14 と 21 の最大の共通因数は 7 です。

$$14x + 21 = 7(2x + 3)$$

すべての項に共通する数を探し、各項をその数で割った結果を括弧の中へ書きます。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1) 4 と 6 には 2、 x^2 と x には x が共通しています。

$$4x^2 + 6x = 2x(2x + 3)$$

(2) 15 と 10 には 5、 a^2 と a には a が共通しています。

$$15a^2 - 10a = 5a(3a - 2)$$

(3) 12 と 18 には 6、 x^3 と x^2 には x^2 が共通しています。

$$12x^3 + 18x^2 = 6x^2(2x + 3)$$

文字については、全項に共通して含まれる最も小さい指数の部分まで取り出せます。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1) 8 と 12 には 4、両方の項に a が共通しています。

$$8ab + 12a = 4a(2b + 3)$$

(2) 18 と 12 には 6、両方に x と y が共通しています。

$$18x^2y - 12xy = 6xy(3x - 2)$$

(3) 15 と 20 には 5、両方に a と b が共通しています。

$$15a^2b + 20ab^2 = 5ab(3a + 4b)$$

文字が複数あるときは、 a 、 b 、 x 、 y などを 1 種類ずつ確認すると共通部分を見落としにくくなります。

ANSWER / 解答 練習問題 4 の解答・解説

(1) 3 つの項すべてに 3 が共通しています。

$$9x^2 - 12x + 6 = 3(3x^2 - 4x + 2)$$

(2) 3 つの項すべてに 7 が共通しています。

$$14a^2 + 21a - 7 = 7(2a^2 + 3a - 1)$$

(3) すべての項に $4x$ が共通しています。

$$8x^3 + 12x^2 - 4x = 4x(2x^2 + 3x - 1)$$

3 項以上ある場合も、すべての項に共通する因数だけを外へ出します。

(1) -4 を取り出します。

$$-4x + 8 = -4(x - 2)$$

(2) $-3x$ を取り出します。

$$-6x^2 + 15x = -3x(2x - 5)$$

(3) $-6a$ を取り出します。

$$-12a^2 - 18a = -6a(2a + 3)$$

負の数を共通因数として取り出すと、括弧内のすべての項の符号が反対になります。

12 と 20 の最大の共通因数は 4 で、両方の項に x が共通しています。
したがって、

$$12x^2 + 20x = 4x(3x + 5)$$

です。

正しい選択肢はイです。

ア、ウ、エも展開すれば元の式へ戻りますが、括弧内にまだ共通因数が残っています。共通因数をできるだけ取り出した形はイです。

与えられた

$$18x^2 - 12x = 6(3x^2 - 2x)$$

は、右辺を展開すると $18x^2 - 12x$ になるので、数学的には正しい式です。
ただし、括弧内の $3x^2$ と $-2x$ には、まだ x が共通しています。
 $18x^2$ と $-12x$ に共通するものを最初から探すと、最大の共通因数は $6x$ です。
したがって、

$$18x^2 - 12x = 6x(3x - 2)$$

です。

因数分解では、一度共通因数を取り出したあとに、括弧内へまだ共通因数が残っていないか確認します。

$3x$ を共通因数として取り出す方針は正しいです。
しかし、 $9x$ を $3x$ で割ると 3 であり、 $3x$ ではありません。

$$\frac{9x}{3x} = 3$$

したがって、

$$\begin{aligned} 6x^2 + 9x &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 3 \\ &= 3x(2x + 3) \end{aligned}$$

です。

よって、正しい因数分解は $3x(2x + 3)$ です。

括弧の中を決めるときは、元の各項を取り出した共通因数で割って確認します。