

第 65 講 独立な試行

学習目標

- 一方の試行の結果が、もう一方の試行の起こりやすさに影響しない「独立な試行」の意味を説明できる。
- 独立な 2 つの事象がともに起こる確率を、確率の積で求められる。
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ の意味を、公正なコインやさいころの具体例で説明できる。
- 独立な試行と、結果によって次の確率が変化する試行を区別できる。

1 回目の結果が 2 回目に影響するか

公正なコインを 2 回投げる

公正なコインを 1 回投げると、表が出る確率は $\frac{1}{2}$ です。

このコインをもう 1 回投げるとします。

1 回目に表が出たとしても、2 回目に表が出る確率は、

$$\frac{1}{2}$$

のままです。

1 回目が裏だったとしても、2 回目に表が出る確率はやはり $\frac{1}{2}$ です。

つまり、1 回目の結果によって 2 回目の起こりやすさは変わりません。

このような関係を、試行が**独立**であるといいます。

独立な試行

2 つの試行について、一方の試行の結果が、もう一方の試行で各結果が起こる確率に影響しないとき、その 2 つの試行は**独立**であるといいます。

独立かどうかを見る基準

独立な試行では、

一方の結果を知っても、もう一方の確率が変わらない

ことがポイントです。

公正なコインを繰り返し投げる場合や、別々の公正なさいころを投げる場合は、基本的な独立な試行の例です。

独立な試行で「両方とも起こる」

コイン 2 枚で考える

公正なコイン X, Y を 1 枚ずつ投げます。

事象 A を「コイン X が表」、事象 B を「コイン Y が表」とします。

それぞれ、

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

です。

2 枚のコインは互いに影響しないので、2 つの試行は独立です。
起こりうる結果を列挙すると、

コイン X	コイン Y
表	表
表	裏
裏	表
裏	裏

の 4 通りです。

このうち、 A と B が両方起こるのは「表・表」の 1 通りなので、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

です。

一方、

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となり、同じ値になります。

独立な事象の積の法則

事象 A と B が独立であるとき、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立ちます。

つまり、独立な事象が両方とも起こる確率は、それぞれの確率を掛けて求められます。

「そして」が独立なら掛ける

独立な試行について、

- A が起こる。
- そして B も起こる。

という確率を求めるときは、

$$P(A)P(B)$$

と考えます。

ただし、先に 2 つの試行が独立であることを確認します。

さいころ 2 個で確かめる

片方の目はもう片方に影響しない

赤い公正な 6 面さいころと、青い公正な 6 面さいころを 1 回ずつ投げます。

事象 A を「赤いさいころが偶数」、事象 B を「青いさいころが 5 以上」とします。

赤いさいころについて、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。
青いさいころについて、

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

です。
赤いさいころの結果は青いさいころの目の出やすさに影響しないので、2つの試行は独立です。
したがって、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

です。

別々の試行なら各確率を分けて考える

独立な2つの試行では、

1. 1つ目の事象の確率を求める。
2. 2つ目の事象の確率を求める。
3. 両方が起こるなら掛ける。

という順に整理すると分かりやすくなります。

同じ試行を2回行う場合

1回目と2回目を区別する

公正な6面さいころを2回投げるとします。
事象 A を「1回目に6が出る」、事象 B を「2回目に偶数が出る」とします。
1回目について、

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

です。
2回目について、

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。
1回目の目によって2回目のさいころの出やすさは変化しないので、2回の試行は独立です。
したがって、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

です。

2回行うだけでは自動的に独立とは限らない

「試行を2回行う」というだけで、必ず独立になるわけではありません。
1回目の結果によって、2回目に起こる結果の確率が変わる場合には独立ではありません。
何回行うかではなく、**前の結果が次の確率へ影響するか**を確認します。

独立でない例

カードを戻さずに続けて取る

赤いカード 2 枚、青いカード 1 枚の合計 3 枚から、1 枚ずつ続けて 2 枚取るとします。

取ったカードは戻さないものとします。

1 枚目を取る前は、赤いカードを取る確率は、

$$\frac{2}{3}$$

です。

しかし、1 枚目に赤いカードを取った場合、残りは赤 1 枚、青 1 枚になるため、2 枚目に赤を取る確率は、

$$\frac{1}{2}$$

になります。

1 枚目の結果によって、2 枚目の赤の出やすさが変化しています。

したがって、この 2 回の抽出は独立ではありません。

独立でない試行との違い

場面	前の結果で次の確率が変わるか	独立か
公正なコインを 2 回投げる	変わらない	独立
公正なさいころを 2 回投げる	変わらない	独立
別々の公正なさいころを投げる	変わらない	独立
カードを戻さず続けて取る	変わることがある	独立ではない

この講では、独立でない抽出について複雑な確率計算は扱いません。

独立と排反は別の意味

同じ言葉ではない

独立は、

一方が起きても、もう一方の起こりやすさが変わらない

という関係です。

一方、排反は、

2 つの事象が同時には起こらない

という関係でした。

この 2 つは意味が異なります。

たとえば、別々の 2 個のさいころについて、

- ・ 赤いさいころで偶数が出る。
- ・ 青いさいころで 6 が出る。

という 2 つの事象は同時に起こることがあり、しかも一方が他方の確率に影響しないので独立です。

独立だから同時に起こらない、ではない

独立な事象は、同時に起こることがあります。

むしろ独立な 2 事象がともに起こる確率を、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

で求めるのがこの講の中心です。

独立な試行の問題を解く手順**基本手順**

1. どの試行とどの試行を考えているか確認する。
2. 一方の結果が他方の確率に影響しないことを確認する。
3. それぞれの事象の確率を別々に求める。
4. 「両方とも起こる」なら、それぞれの確率を掛ける。
5. 答えが 0 以上 1 以下であることを確認する。

例題**例題 1**

公正なコインを 2 回投げます。

1 回目に表が出て、2 回目にも表が出る確率を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

1 回目と 2 回目のコイン投げは独立です。

1 回目に表が出る確率は $\frac{1}{2}$ 、2 回目に表が出る確率も $\frac{1}{2}$ です。

したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。

よって、求める確率は $\frac{1}{4}$ です。

例題 2

赤い公正な 6 面さいころと青い公正な 6 面さいころを 1 回ずつ投げます。

赤いさいころで 3 以下の目が出て、青いさいころで 6 が出る確率を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

2 個のさいころの結果は互いに影響しないので、試行は独立です。
赤いさいころで 3 以下の目が出る確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

青いさいころで 6 が出る確率は、

$$\frac{1}{6}$$

です。

したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

です。

例題 3

赤いカード 2 枚と青いカード 1 枚があります。
3 枚から 1 枚を取り、そのカードを戻さずにもう 1 枚取ります。
この 2 回の抽出が独立ではない理由を説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

最初は 3 枚中 2 枚が赤なので、1 枚目に赤を取る確率は $\frac{2}{3}$ です。
しかし、1 枚目に赤を取ると、残り 2 枚のうち赤は 1 枚になるので、次に赤を取る確率は $\frac{1}{2}$ になります。
1 枚目の結果によって 2 枚目の赤の出やすさが変化するため、この 2 回の抽出は独立ではありません。

演習問題

練習問題 1

公正なコインを 2 回投げます。
1 回目に表、2 回目に裏が出る確率を求めなさい。

練習問題 2

公正な 6 面さいころを 2 回投げます。
1 回目に 2 が出て、2 回目に 5 が出る確率を求めなさい。

練習問題 3

赤い公正な 6 面さいころと青い公正な 6 面さいころを 1 回ずつ投げます。
赤いさいころで偶数が出て、青いさいころで 3 以下の目が出る確率を求めなさい。

練習問題 4

公正なコインと公正な 6 面さいころを同時に使います。
コインで表が出て、さいころで 4 以上の目が出る確率を求めなさい。

練習問題 5

公正な 6 面さいころを 2 回投げます。
1 回目に奇数が出て、2 回目に 6 が出る確率を求めなさい。

練習問題 6

次の試行が独立かどうか答え、理由を説明しなさい。
(1) 公正なコインを 1 回投げ、そのあと同じコインをもう 1 回投げる。
(2) 赤いカード 2 枚、白いカード 2 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。

練習問題 7

独立な事象 A, B について、

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

です。
 A と B がともに起こる確率を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、公正なコインを 2 回投げて 2 回とも表が出る確率を、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

としました。
誤りを説明し、正しい確率を求めなさい。

練習問題 9

公正な 6 面さいころを 2 回投げます。

事象 A を「1 回目に 4 以上の目が出る」、事象 B を「2 回目に偶数の目が出る」とします。

(1) A と B に対応する試行が独立である理由を説明しなさい。

(2) $P(A)$ と $P(B)$ を求めなさい。

(3) $P(A \cap B)$ を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

2 回のコイン投げは独立です。

1 回目に表が出る確率は $\frac{1}{2}$ 、2 回目に裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ です。

したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

2 回のさいころ投げは独立です。

1 回目に 2 が出る確率は $\frac{1}{6}$ 、2 回目に 5 が出る確率も $\frac{1}{6}$ です。

したがって、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

2 個のさいころの試行は独立です。

赤いさいころで偶数が出る確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

青いさいころで 3 以下の目が出る確率も、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

コインの結果は、さいころの目の出やすさに影響しません。
したがって、2つの試行は独立です。
コインで表が出る確率は $\frac{1}{2}$ です。
さいころで4以上の目が出る確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。
したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

2回のさいころ投げは独立です。
1回目に奇数が出る確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。
2回目に6が出る確率は $\frac{1}{6}$ です。
したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 独立です。
1回目に表や裏のどちらが出ても、2回目に表または裏が出る確率は変わりません。
(2) 独立ではありません。
1枚目を戻さないため、1枚目に何色を取ったかによって、2枚目に各色を取る確率が変化するからです。

練習問題 7 の解答・解説

AとBは独立なので、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

です。
したがって、

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

求めるのは「1 回目に表が出て、そして 2 回目にも表が出る」という両方が起こる確率です。独立な 2 回の試行で両方が起こる確率なので、足すのではなく掛けます。したがって、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 1 回目のさいころの結果によって、2 回目の各目の出やすさは変化しません。

したがって、2 回の試行は独立です。

(2) 1 回目に 4 以上の目が出る場合は 4, 5, 6 の 3 通りなので、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

2 回目に偶数が出る場合は 2, 4, 6 の 3 通りなので、

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

(3) A と B は独立なので、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

です。