第 021 講 斜面上の運動を整理する

この講でできるようになること

- 斜面上の物体に働く力を見分け、斜面方向と面に垂直な方向に分けて表せる。
- 重力の成分と運動方程式から、垂直抗力と加速度を求められる。
- 静止摩擦力の必要量と最大値を比較し、静止できるか判断できる。
- 物体が滑る向きに応じて動摩擦力の向きを決め、運動を説明できる。

1. 斜面では、どの向きに力を分ければよいか

水平な床の上では、重力は鉛直下向き、床から受ける垂直抗力は鉛直上向きとなる。ところが、床が傾いて斜面になると、垂直抗力は鉛直上向きではなくなる。

斜面上の物体の運動を調べるときは、水平・鉛直方向ではなく、**斜面に沿った方向と斜面に垂直な方向**に分けると、運動方程式を整理しやすい。

ここでは、水平から角 θ だけ傾いた、動かない一直線の斜面を考える。対象は斜面に接している物体 A の一つだけである。

座標の正方向を次のように決める。

- x 軸：斜面に沿い、**斜面下向きを正**とする。
- y 軸：斜面に垂直で、**斜面から離れる向きを正**とする。

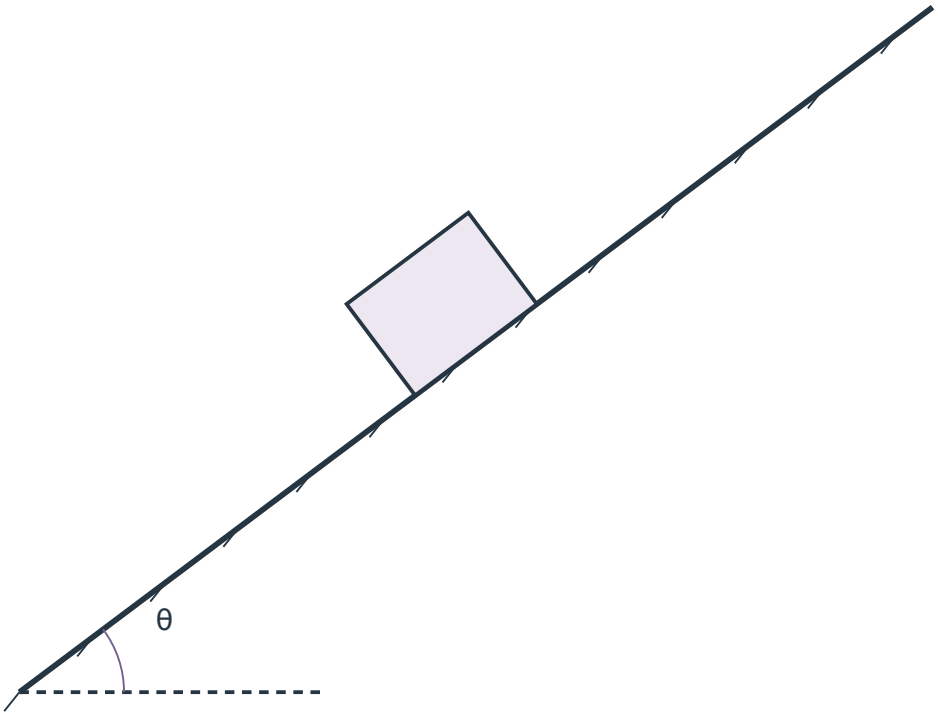


図 1　角 θ は水平と斜面の間。x 正は斜面下向き（左下）、y 正は面から離れる向き（左上）。物体 A の配置図であり、力をすべて描いた図ではない。

斜面下向きは図の左下、面から離れる向きは左上である。二つの軸は互いに直角になる。

物体が斜面を下る場合も、斜面を上る場合も、座標の正方向は変えない。運動する向きが変わるたびに座標を取り直すと、力や加速度の符号を混同しやすくなるためである。

©ミライコーチング

ミライポイント

座標は「物体がどちらへ動くか」ではなく、「どちらを正として計算するか」を決める約束である。物体が斜面上向きに動いていても、斜面下向きを x の正方向にしてよい。

2. 重力を斜面方向と垂直方向に分解する

2.1 重力そのものの向きは変わらない

物体の質量を m、重力加速度の大きさを g とする。物体に働く重力の大きさ W は、

$$W = mg$$

であり、向きは常に鉛直下向きである。

斜面が傾いても、重力が斜面に沿って斜めに働くわけではない。ただし、運動方程式を立てるために、重力を次の二つの成分で表せる。

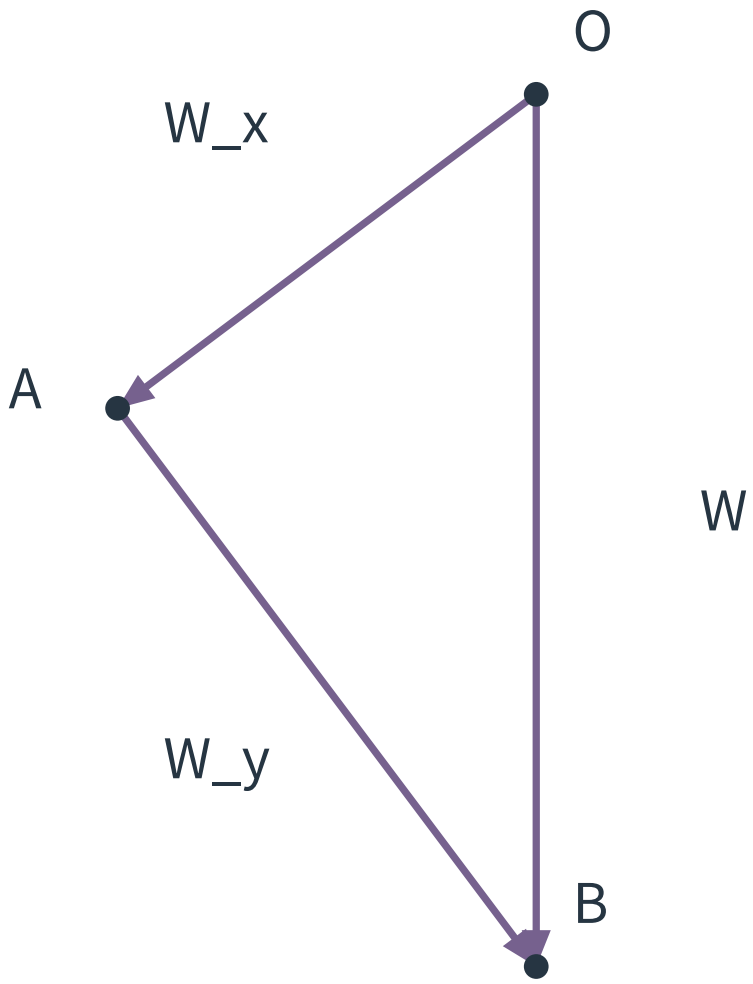
- 斜面に沿って物体を下ろそうとする成分
- 斜面に垂直で、物体を斜面へ押しつける成分

2.2 三角比と重力の成分

斜面の角 θ は水平と斜面の間の角である。この角に対応する直角三角形を考えると、重力の大きさ mg は斜辺に当たる。

重力の斜面方向成分の大きさは $mg\sin\theta$、垂直方向成分の大きさは $mg\cos\theta$ となる。

©ミライコーチング



この図は重力ベクトルを成分に分解した数学的な図であり、物体に働く独立した力を三つ描いたものではない。図中の矢印は同じ長さの基準で表しており、W_x と W_y をつなぐと重力 W になる。

斜面方向の成分は斜面下向きであるため、x 軸の正方向と一致する。一方、垂直方向の成分は斜面へ向かうため、y 軸の負方向となる。

したがって、符号付きの成分は、

$$W_x = +mg\sin\theta$$

$$W_y = -mg\cos\theta$$

である。

ここで W_x、W_y は、重力を各軸方向へ分けた成分を表す。図中の成分矢印の長さはそれぞれの大きさを示し、式の正負は定めた座標に対する向きを示す。

なぜ $\sin\theta$ と $\cos\theta$ がこの位置になるのかも確認する。

重力と成分がつくる直角三角形では、斜面方向の成分は角 θ の対辺に、面へ向かう成分は隣辺に対応する。斜面方向の成分矢印と紙面の水平線がつくる鋭角、面へ向かう成分矢印と鉛直下向きがつくる鋭角は、いずれも θ である。

直角三角形の定義から、

$$\sin\theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$$

となるため、成分の式が得られる。

重力を二重に数えない

重力 W と、その成分 W_x、W_y を、それぞれ別の外力として同時に加えてはいけない。

実際に働く重力は一つである。運動方程式では、その一つの重力を必要な軸方向の成分に置き換えて使う。

2.3 数値で成分を確かめる

質量 $2.0\,\mathrm{kg}$ の物体を考える。重力加速度を $10\,\mathrm{m/s^2}$、斜面角について $\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ とする。

重力の大きさは、

$$W = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。ここで N は力の単位ニュートンである。

斜面方向の成分は、

$$W_x = (20\,\mathrm{N}) \times 0.60 = +12\,\mathrm{N}$$

垂直方向の成分は、

$$W_y = -(20\,\mathrm{N}) \times 0.80 = -16\,\mathrm{N}$$

となる。

つまり、物体は重力によって斜面下向きに $12\,\mathrm{N}$、斜面へ向かう向きに $16\,\mathrm{N}$ の成分を受けている。

$\sin\theta$、$\cos\theta$ は三角比であり、単位を持たない。

なお、この設定では $\tan\theta = \frac{3}{4}$ なので、θ は約 36.87° である。37° は近似した角度であり、与えた三角比と厳密に一致する値ではない。

3. 垂直抗力はどう決まるか

3.1 垂直抗力は重力の成分とは別の力

斜面に接する物体は、斜面から押し返す力を受ける。これを**垂直抗力**といい、その大きさを N と表す。

垂直抗力の向きは斜面に垂直で、面から離れる向きである。斜面が傾いている場合、垂直抗力は鉛直上向きではない。

重力の垂直方向成分 $-mg\cos\theta$ と垂直抗力 N は、向きが逆である。

ただし、重力を分解しただけでは垂直抗力の大きさは決まらない。**垂直方向の運動方程式**を立てる必要がある。

3.2 接触を保つ場合の運動方程式

物体が固定された直線斜面に接触し続け、面から離れたり面へ入り込んだりしないとする。また、重力と垂直抗力以外に、斜面に垂直な成分を持つ外力はないものとする。

この場合、垂直方向の加速度は、

$$a_y = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

y 軸の正方向を面から離れる向きとしたので、垂直方向の運動方程式は、

$$N - mg\cos\theta = ma_y$$

となる。

ここで $a_y = 0$ を代入すると、

$$N - mg\cos\theta = 0$$

したがって、

$$N = mg\cos\theta$$

が得られる。

これは暗記するだけの無条件の公式ではない。固定斜面との接触が保たれ、垂直方向の加速度がゼロで、ほかの垂直方向の外力がないという条件から導いた関係である。

たとえば先ほどの物体では、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

ミライポイント

重力の分解と垂直抗力の決定は別の操作である。

重力の成分 $mg\cos\theta$ は、重力と斜面角から求める。垂直抗力 N は、垂直方向の運動方程式から求める。今回の条件では両者の大きさが等しくなるが、もともと同じ力という意味ではない。

©ミライコーチング

4. 摩擦のない斜面ではどう動くか

摩擦を無視できる斜面を、滑らかな斜面という。

斜面上の物体に働く外力は、重力 W と垂直抗力 N の二つである。物体に働く力をすべて描いた図を**全力図**という。

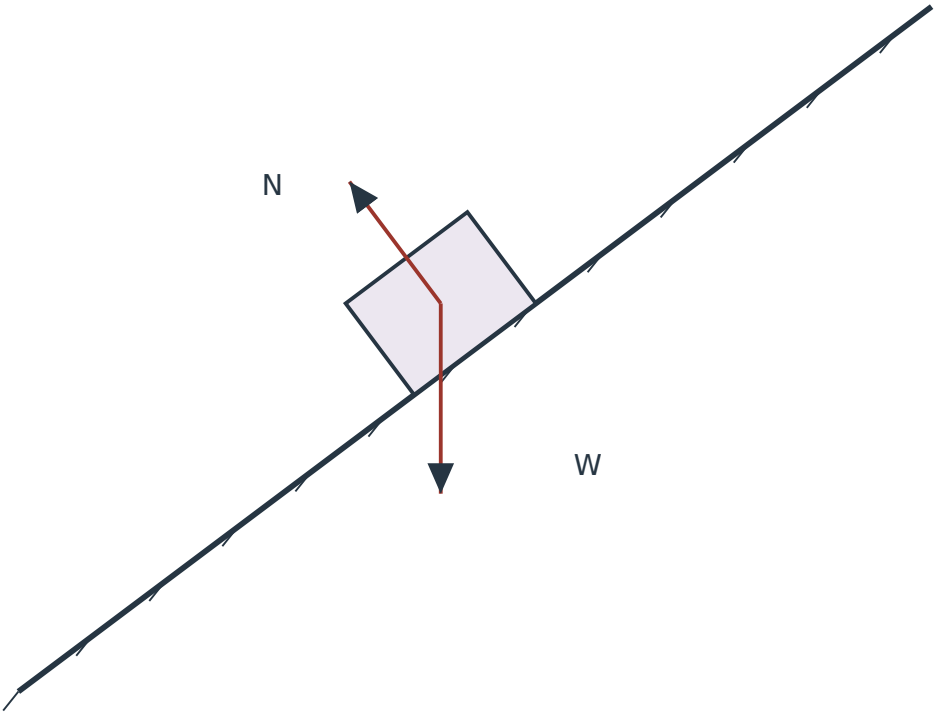


図 3　滑らかな斜面上の物体 A の全力図。重力 W は鉛直下向き 20 N、垂直抗力 N は面から離れる向き 16 N。力の矢印は共通尺度 5 px/N。

重力は斜面に沿って下向きの成分を持つが、垂直抗力は斜面方向の成分を持たない。

したがって、斜面方向の運動方程式は、

$$mg\sin\theta = ma_x$$

である。質量 m は正であるため、両辺を m で割ると、

$$a_x = g\sin\theta$$

となる。

この式は、滑らかな固定斜面で接触を保っている場合、斜面方向の加速度が質量によらず決まることを示す。斜面下向きを正にしているので、a_x が正なら加速度の向きは斜面下向きである。

1

水平から角 θ だけ傾いた滑らかな固定斜面上に、質量 $2.0\,\mathrm{kg}$ の物体 A を置き、静かに離した。物体は斜面と接触したまま運動し、重力と垂直抗力以外の外力は働かないものとする。

重力加速度を $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ とする。斜面下向きを x 正、面から離れる向きを y 正とする。

(1) 重力の大きさと、その斜面方向成分、垂直方向成分を求めよ。

(2) 垂直抗力の大きさを求めよ。

(3) 斜面方向の加速度の大きさと向きを求めよ。

解答・解説

(1) 重力の大きさは、

$$W = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。

斜面方向の成分は、

$$W_x = (20\,\mathrm{N}) \times 0.60 = +12\,\mathrm{N}$$

垂直方向の成分は、

$$W_y = -(20\,\mathrm{N}) \times 0.80 = -16\,\mathrm{N}$$

である。符号は、最初に決めた各軸の正方向に従う。

(2) 物体は斜面に接したままであり、垂直方向の加速度はゼロである。また、ほかの垂直方向の外力はない。

よって、

$$N - mg\cos\theta = 0$$

から、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

(3) 摩擦はないため、斜面方向の合力は重力の斜面方向成分だけである。

$$ma_x = mg\sin\theta$$

数値を代入すると、

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N}$$

したがって、

$$a_x = \frac{12\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +6.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

加速度は **斜面下向きに** $6.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。物体を静かに離した後、その速さは斜面下向きに増していく。

5. 静止摩擦があるときはどう判断するか

5.1 静止摩擦は常に最大ではない

粗い斜面上に物体を置いた場合、重力の斜面方向成分によって物体が下へ動こうとする。

しかし、接触面に静止摩擦力が働けば、物体が静止したままになる場合がある。

静止している物体が滑り出さないように働く摩擦力を静止摩擦力といい、その大きさを f_s とする。

斜面上で重力のために下へ滑り出そうとする物体を静止させるには、静止摩擦力は斜面上向きに働かなければならない。

静止しているので $a_x = 0$ であり、斜面方向の運動方程式は、

$$mg\sin\theta - f_s = 0$$

したがって、静止するために**必要な静止摩擦力**は、

$$f_s = mg\sin\theta$$

である。

ただし、静止摩擦力は無制限に大きくなれるわけではない。

最大静止摩擦係数を μ_s とすると、最大静止摩擦力は、

$$f_{s,\max} = \mu_s N$$

である。μ_s は単位を持たない係数である。

静止が可能かを調べるには、

$$mg\sin\theta \le \mu_s N$$

が成立するかを比較する。

この不等式が成り立つなら、必要な静止摩擦力を出すことができる。実際の静止摩擦力は必要量に応じて決まり、常に最大値になるわけではない。

5.2 同じ斜面でも摩擦係数で結果が変わる

質量 2.0 kg、重力加速度 $10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ の物体を考える。固定斜面に接触し、ほかの法線方向の外力はないものとする。

垂直抗力は 16 N、静止に必要な摩擦力は 12 N である。

最大静止摩擦係数による違いを比べる。

μ_s	最大静止摩擦力	静止の判断
0.80	12.8 N	静止できる
0.75	12 N	静止できる限界
0.50	8 N	静止を保てない

$\mu_s = 0.80$ の場合、最大値は 12.8 N だが、実際の静止摩擦力は 12 N で十分である。

$\mu_s = 0.75$ の場合、必要な力と限界が等しい。これは滑り出す直前の限界状態として扱う。等しくなっただけで、直ちに動摩擦力へ切り替わるわけではない。

$\mu_s = 0.50$ の場合は、最大でも 8 N しか働かないため、12 N の重力成分を打ち消せない。静止状態を保つことはできず、物体を離すと滑り始める。

2

水平から角 θ だけ傾いた粗い固定斜面上で、質量 2.0 kg の物体 A が初め静止している。斜面は動かず、物体は面から離れない。重力、垂直抗力、摩擦力以外の外力はない。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、最大静止摩擦係数 $\mu_s = 0.80$ とする。

(1) 最大静止摩擦力を求めよ。

(2) 物体は静止し続けられるか。理由を示せ。

(3) 静止しているとき、実際に働く静止摩擦力の大きさと向きを求めよ。

解答・解説

まず、垂直方向の加速度がゼロであり、ほかの法線方向の外力がないので、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

(1) 最大静止摩擦力は、

$$f_{s,\max} = 0.80 \times (16\,\mathrm{N}) = 12.8\,\mathrm{N}$$

である。

(2) 斜面下向きの重力成分は、

$$mg\sin\theta = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.60 = 12\,\mathrm{N}$$

である。

必要な静止摩擦力 12 N は最大値 12.8 N 以下なので、物体は静止し続けられる。

(3) 静止しているため、斜面方向の合力はゼロである。

$$12\,\mathrm{N} - f_s = 0$$

よって、

$$f_s = 12\,\mathrm{N}$$

となる。

向きは**斜面上向き**である。最大値そのものではなく、重力の斜面方向成分を打ち消すのに必要な大きさだけ働く。

ミライポイント

静止摩擦の問題では、「最大静止摩擦力を計算する」ことが最終目的とは限らない。

先に静止するための必要量を求め、次に限界と比較する。静止できる場合、実際の摩擦力は力のつり合いから決定する。

6. 滑っている物体にはどちら向きに摩擦が働くか

6.1 動摩擦は滑る向きと反対

物体が斜面上を滑っている場合は、動摩擦力を考える。

動摩擦係数を μ_k、動摩擦力の大きさを f_k とすると、今回の接触条件では、

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

となる。

動摩擦力は、物体が接触面に対して**滑っている向きと反対**に働く。

斜面下向きを x 正にした場合、滑りの向きと摩擦力の符号は次のようになる。

物体が滑る向き	動摩擦力の向き	x 成分の符号
斜面下向き	斜面上向き	負
斜面上向き	斜面下向き	正

摩擦力の向きを決める基準は、重力の向きでも加速度の向きでもない。**その瞬間の滑る向き**である。

6.2 斜面下向きに滑っているとき

斜面下向きに滑っている場合、動摩擦力は斜面上向きとなる。

斜面方向の運動方程式は、

$$mg\sin\theta - f_k = ma_x$$

ここへ $f_k = \mu_k mg\cos\theta$ を代入すると、

$$mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma_x$$

したがって、

$$a_x = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

となる。

この式で a_x が正なら、加速度は斜面下向きである。

一方、もし結果が負なら、物体が斜面下向きに動いていても、加速度は斜面上向きである。速度の向きと加速度の向きが反対なので、滑る速さは小さくなる。

6.3 斜面上向きに滑っているとき

物体が斜面上向きに滑っている場合、動摩擦力は斜面下向きとなる。

重力の斜面方向成分も斜面下向きなので、二つの力は同じ向きである。

斜面下向きを x 正としたまま運動方程式を立てると、

$$mg\sin\theta + f_k = ma_x$$

したがって、

$$a_x = g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

となる。

この場合、加速度は斜面下向きであり、物体の速度は斜面上向きなので、滑っている間は速さが小さくなる。

物体が停止した後は、静止摩擦が働く可能性もあり、再び滑り出す向きも条件によって決まる。したがって、**上向きに滑っている間の動摩擦の式を、停止後まで無条件に使ってはいけない。**

3

水平から角 θ だけ傾いた粗い固定斜面上を、質量 $2.0\,\mathrm{kg}$ の物体 A が滑っている。物体は面に接触し続け、重力、垂直抗力、動摩擦力以外の外力は働かない。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、動摩擦係数 $\mu_k = 0.25$ とする。斜面下向きを x 正とする。

(1) 動摩擦力の大きさを求めよ。

(2) 斜面下向きに滑っている瞬間の加速度を求めよ。

(3) 同じ物体が斜面上向きに滑っている瞬間の加速度を求めよ。滑りの向きが反転したという別の状態を考えるものとする。

解答・解説

まず、接触を維持し、法線方向の加速度がゼロであるため、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

である。

(1) 動摩擦力の大きさは、

$$f_k = 0.25 \times (16\,\mathrm{N}) = 4.0\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) 下向きに滑っている場合、摩擦力は上向きなので、

$$ma_x = mg\sin\theta - f_k$$

である。

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N} - 4.0\,\mathrm{N}$$

したがって、

$$a_x = \frac{8.0\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +4.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

加速度は斜面下向きであり、下向きに滑る物体の速さは増す。

(3) 上向きに滑っている場合、動摩擦力は下向きとなる。重力成分と同じ向きなので、

$$ma_x = mg\sin\theta + f_k$$

である。

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N} + 4.0\,\mathrm{N}$$

したがって、

$$a_x = \frac{16\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +8.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

加速度は斜面下向きに $8.0\,\mathrm{m/s^2}$ である。上向きに滑っている間は、速度と加速度が逆向きなので、速さが小さくなる。

(2)と(3)では物体と斜面の条件は同じだが、滑る向きが異なるため、摩擦力の向きが反転し、加速度も変化する。

7. 運動を判断するときの手順

斜面の問題では、重力を分解するだけで運動を判断できるとは限らない。物体が静止しているのか、既に滑っているのか、どちら向きに滑っているのかを区別する必要がある。

次の順序で考えると、力を数え間違えにくい。

1. **対象と座標を定める。** 一つの物体を選び、斜面下向きを x 正、面から離れる向きを y 正とする。
2. **外力を挙げる。** 重力、垂直抗力、必要なら摩擦力を考える。重力の成分は独立した外力として追加しない。
3. **垂直方向の運動方程式を立てる。** 接触を保ち、ほかに法線方向の外力がなければ、$N = mg\cos\theta$ が得られる。
4. **摩擦の状態を判断する。** 静止している場合は必要な静止摩擦力と最大値を比較する。滑っている場合は、滑る向きの反対に動摩擦力を置く。
5. **斜面方向の運動方程式を立てる。** 正負を付けた合力から加速度を求め、向きや速さの変化を解釈する。

力・速度・加速度は別々に判断する

斜面下向きに加速度があっても、物体が必ず斜面下向きに動いているとは限らない。斜面上向きに滑りながら減速している場合もある。

また、加速度がゼロでも物体が必ず静止しているわけではない。速度が一定のまま運動する場合もある。

運動の状態を決めるときは、力によって決まる加速度と、その時点での速度を区別することが重要である。

演習問題

1

水平から角 θ だけ傾いた滑らかな固定斜面に質量 $2.0\,\mathrm{kg}$ の物体 A が接している。物体を静かに離すと、斜面に沿って滑り始めた。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ とし、重力と垂直抗力以外の外力は働かない。斜面下向きを x 正、面から離れる向きを y 正とする。

(1) 重力の x 成分と y 成分を、符号と単位を付けて求めよ。

(2) 垂直抗力の大きさを求めよ。また、用いた運動方程式とその条件を示せ。

(3) 物体 A に働くすべての外力を矢印で表した全力図を描き、各力の名称、大きさ、向きを示せ。

(4) 斜面方向の加速度を求め、向きを答えよ。

2

水平から角 θ だけ傾いた粗い固定斜面上に、質量 $2.0\,\mathrm{kg}$ の物体 A を初め静止させている。物体は斜面に接しており、ほかの外力は重力、垂直抗力、静止摩擦力だけである。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、最大静止摩擦係数 $\mu_s = 0.80$ とする。斜面下向きを x 正とする。

(1) 静止を保つために必要な摩擦力の大きさと向きを求めよ。

(2) 最大静止摩擦力を求め、物体が静止できるか判定せよ。

(3) 実際に静止しているときの全力図を描き、各外力の大きさと向きを示せ。

(4) 「静止摩擦力は必ず最大静止摩擦力に等しい」という説明が、この問題で正しくない理由を述べよ。

©ミライコーチング

3

固定された粗い直線斜面上に質量 2.0 kg の物体 A を静かに置く。斜面角について $\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、重力加速度は $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

物体は斜面に接触し、重力、垂直抗力、摩擦力以外の外力は働かない。斜面下向きを x 正とする。

(1) 最大静止摩擦係数が $\mu_s = 0.75$ のとき、静止していられるか。必要な静止摩擦力と最大値を比較し、状態を説明せよ。

(2) 最大静止摩擦係数が $\mu_s = 0.50$ のとき、静止を保てるか。理由を数値で示せ。

(3) (2)で物体が滑り始めた後の加速度を求めるには、さらにどのような情報が必要か。また、なぜ必要なのか説明せよ。

4

水平から角 θ だけ傾いた粗い固定斜面上を、質量 2.0 kg の物体 A が**既に斜面下向きに滑っている瞬間**を考える。物体は斜面と接触し続け、重力、垂直抗力、動摩擦力以外の外力は働かない。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、動摩擦係数 $\mu_k = 0.25$ とする。斜面下向きを x 正とする。

(1) 垂直抗力と動摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。

(2) 動摩擦力の向きを答え、その理由を説明せよ。

(3) この瞬間の全力図を描き、すべての外力を名称、大きさ、向きとともに示せ。

(4) 加速度を求めよ。また、この瞬間の滑る速さは増すか、減るか答えよ。

5

水平から角 θ だけ傾いた粗い固定斜面上を、質量 2.0 kg の物体 A が**既に斜面上向きに滑っている瞬間**を考える。物体は斜面と接触し続け、重力、垂直抗力、動摩擦力以外の外力は働かない。

$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、$\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$、動摩擦係数 $\mu_k = 0.25$ とする。斜面下向きを x 正とする。

(1) 動摩擦力の大きさと向きを求めよ。

(2) 物体 A の全力図を描き、すべての外力の大きさと向きを示せ。

(3) この瞬間の加速度を求め、向きを答えよ。

(4) 物体が上向きに滑っている間の速さはどう変化するか。また、停止後にも(3)の運動方程式をそのまま使い続けてよいか。理由とともに答えよ。

©ミライコーチング

6

固定された一直線の斜面上を運動する物体 A について考える。斜面下向きを x 正、面から離れる向きを y 正とする。

(1) 重力 W を W_x、W_y に分解した生徒が、「物体には W、W_x、W_y の三つの重力が働く」と述べた。誤りを説明せよ。

(2) 別の生徒が「斜面上なら、条件を確認しなくても垂直抗力は常に $mg\cos\theta$ である」と述べた。今回扱った運動方程式を用いて、この説明に不足している条件を示せ。

(3) 滑らかな固定斜面で物体が接触を保ち、重力と垂直抗力のみが働いているとする。斜面下向きを正にすると加速度は $+6.0\,\mathrm{m/s^2}$ であった。斜面上向きを正に取り直した場合、加速度の符号と物理的な向きはどうなるか。

(4) $\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ と与えられたとき、$\theta = 37^\circ$ を厳密な等式として用いてよいか。理由を説明せよ。

演習問題の解答・解説

1

(1) 重力の大きさは、

$$W = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 20\,\mathrm{N}$$

である。

斜面下向きを正とした x 成分は、

$$W_x = (20\,\mathrm{N}) \times 0.60 = +12\,\mathrm{N}$$

面から離れる向きを正とした y 成分は、

$$W_y = -(20\,\mathrm{N}) \times 0.80 = -16\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) 固定された直線斜面との接触を保ち、垂直方向の加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ である。また、重力と垂直抗力以外に垂直方向の外力はない。

したがって、

$$N - mg\cos\theta = ma_y = 0\,\mathrm{N}$$

から、

$$N = (20\,\mathrm{N}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

(3) 物体 A に働く外力は、鉛直下向きの重力 $W = 20\,\mathrm{N}$ と、斜面に垂直で面から離れる向きの垂直抗力 $N = 16\,\mathrm{N}$ の二つである。

摩擦を無視できるため、摩擦力の矢印は描かない。また、重力の成分 W_x、W_y を別の実在力として追加しない。

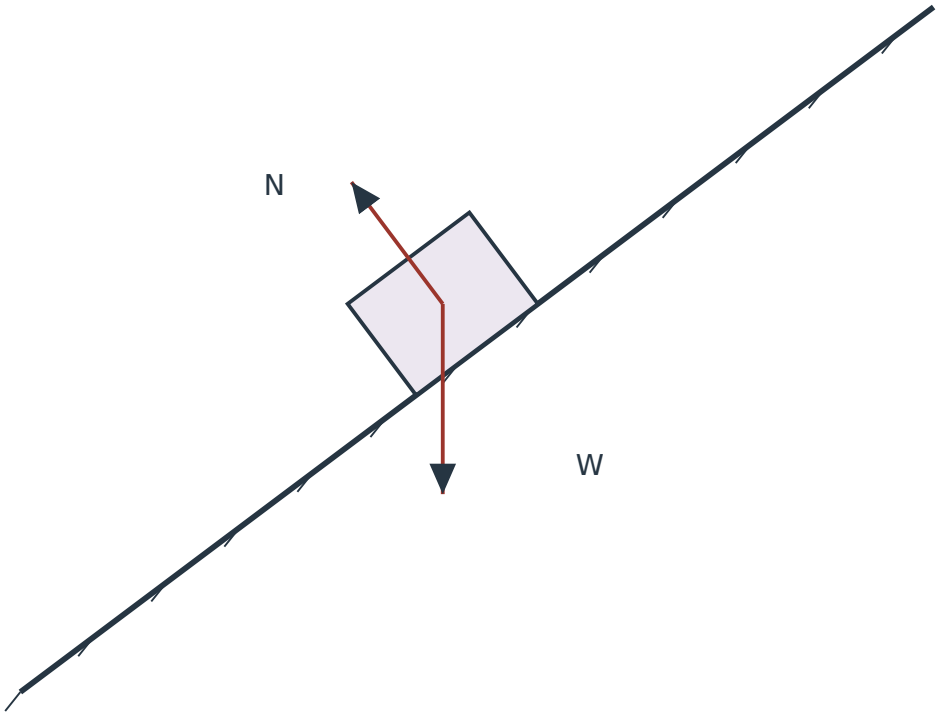


図 4　演習 1 の全力図。物体 A に働く力は重力 W=20 N と垂直抗力 N=16 N。力の矢印は共通尺度 5 px/N。

(4) 斜面方向の合力は重力の斜面方向成分 $12\,\mathrm{N}$ なので、

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N}$$

となる。

よって、

$$a_x = \frac{12\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +6.0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

加速度の向きは斜面下向きである。正の符号は、設定した x 軸の正方向と一致していることを示す。

2

(1) 静止するためには、斜面下向きの重力成分を静止摩擦力で打ち消さなければならない。
その必要量は、

$$f_s = mg\sin\theta$$

である。

$$f_s = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.60 = 12\,\mathrm{N}$$

したがって、必要な静止摩擦力は斜面上向きに 12 N である。

(2) 接触を維持し、垂直方向の加速度がゼロであることから、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。
最大静止摩擦力は、

$$f_{s,\max} = 0.80 \times (16\,\mathrm{N}) = 12.8\,\mathrm{N}$$

である。
必要量 12 N が最大値 12.8 N 以下であるため、物体は静止できる。

(3) 実際に静止しているときの外力は次の三つである。

- 重力 $W = 20\,\mathrm{N}$：鉛直下向き
- 垂直抗力 $N = 16\,\mathrm{N}$：斜面から離れる向き
- 静止摩擦力 $f_s = 12\,\mathrm{N}$：斜面上向き

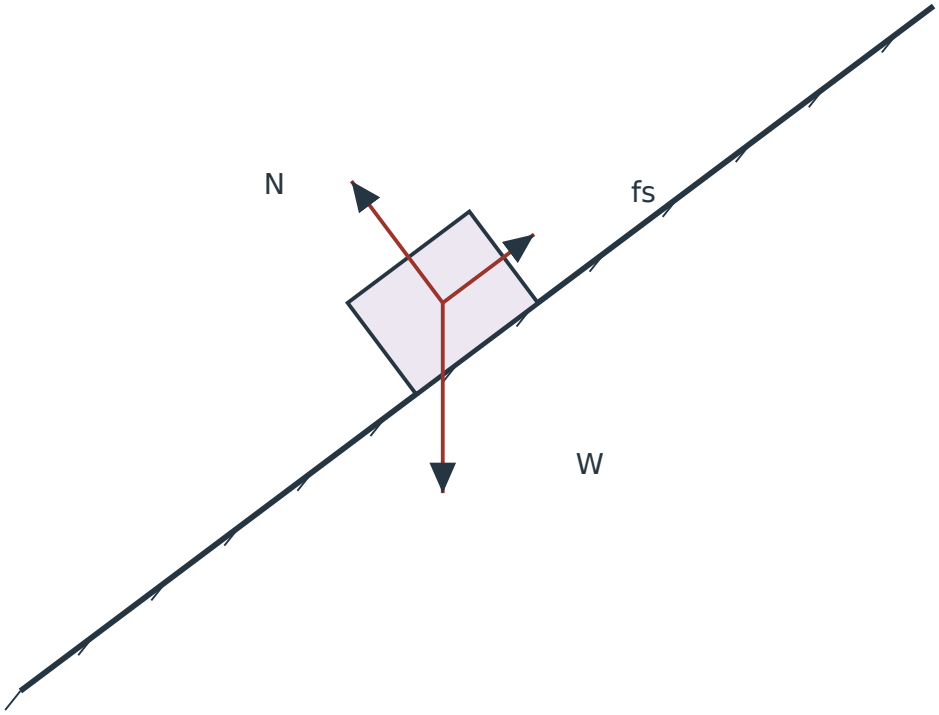


図 5　演習 2 の全力図。初め静止し μs=0.80。物体 A には W=20 N、N=16 N、斜面上向きの静止摩擦 fs=12 N が働く。力の矢印は共通尺度 5 px/N。

(4) 最大静止摩擦力 12.8 N は、静止摩擦が働ける限界の大きさである。一方、実際に静止するために必要なのは 12 N である。

もし静止摩擦力が常に最大の 12.8 N であれば、斜面方向に 0.8 N の上向き合力が残り、静止の条件と矛盾する。

したがって、実際の静止摩擦力は力のつり合いを満たす 12 N であり、最大値とは異なる。

3

まず、重力の斜面方向成分は、

$$mg\sin\theta = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.60 = 12\,\mathrm{N}$$

である。

垂直抗力は、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

(1) $\mu_s = 0.75$ の場合、最大静止摩擦力は、

$$f_{s,\max} = 0.75 \times (16\,\mathrm{N}) = 12\,\mathrm{N}$$

である。

必要な静止摩擦力と最大値が等しいため、物体は静止を保てる限界の状態にある。

このとき実際の静止摩擦力は斜面上向きに 12 N である。限界と等しいだけで、既に滑っていると判断してはいけない。

(2) $\mu_s = 0.50$ の場合、最大静止摩擦力は、

$$f_{s,\max} = 0.50 \times (16\,\mathrm{N}) = 8.0\,\mathrm{N}$$

である。

静止に必要な 12 N より小さいため、静止を保つことはできない。

斜面下向きの重力成分を静止摩擦で打ち消せず、物体は斜面下向きに滑り始める。

(3) 滑り始めた後の加速度を計算するには、**動摩擦係数** μ_k が必要である。

滑っている間の動摩擦力は、

$$f_k = \mu_k N$$

となり、静止摩擦係数 μ_s だけからは決められない。

滑り始めた後に斜面下向きに滑っている区間では、

$$mg\sin\theta - \mu_k N = ma_x$$

となるが、μ_k が与えられていないため、加速度の数値は確定できない。

4

(1) 垂直方向の加速度がゼロであり、ほかの法線方向の外力がないため、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})\bigl(10\,\mathrm{m/s^2}\bigr) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

である。

動摩擦力の大きさは、

$$f_k = \mu_k N = 0.25 \times (16\,\mathrm{N}) = 4.0\,\mathrm{N}$$

となる。

(2) 物体は斜面下向きに滑っているため、動摩擦力はその滑りに逆らう**斜面上向き**に働く。

斜面下向きを x 正にしているので、摩擦力の x 成分は負である。

(3) 物体 A に働くすべての外力は、重力、垂直抗力、動摩擦力である。

重力は鉛直下向きに 20 N、垂直抗力は斜面から離れる向きに 16 N、動摩擦力は斜面上向きに 4.0 N である。

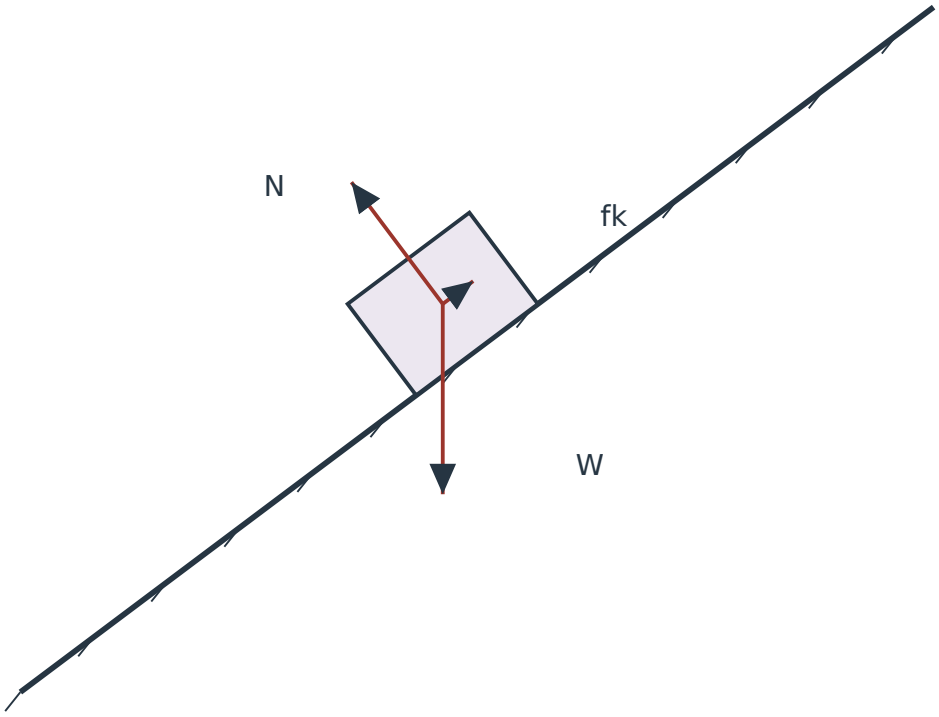


図 6　演習 4 の全力図。物体 A は斜面下向きに滑っている。W=20 N、N=16 N、上向きの動摩擦 fk=4.0 N。力の矢印は共通尺度 5 px/N。

(4) 斜面方向の合力は、下向きの重力成分から上向きの動摩擦力を引いたものである。

$$ma_x = mg\sin\theta - f_k$$

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N} - 4.0\,\mathrm{N} = 8.0\,\mathrm{N}$$

よって、

$$a_x = \frac{8.0\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +4.0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

加速度は斜面下向きであり、この瞬間の速度も斜面下向きであるため、物体の速さは増している。

5

(1) 物体が斜面と接触し、垂直方向の加速度がゼロであるため、

$$N = (2.0\,\mathrm{kg})\left(10\,\mathrm{m/s^2}\right) \times 0.80 = 16\,\mathrm{N}$$

となる。

動摩擦力の大きさは、

$$f_k = 0.25 \times (16\,\mathrm{N}) = 4.0\,\mathrm{N}$$

である。

物体は斜面上向きに滑っているので、動摩擦力は斜面下向きに働く。

(2) 外力は、鉛直下向きの重力 $W = 20\,\mathrm{N}$、面から離れる向きの垂直抗力 $N = 16\,\mathrm{N}$、斜面下向きの動摩擦力 $f_k = 4.0\,\mathrm{N}$ の三つである。

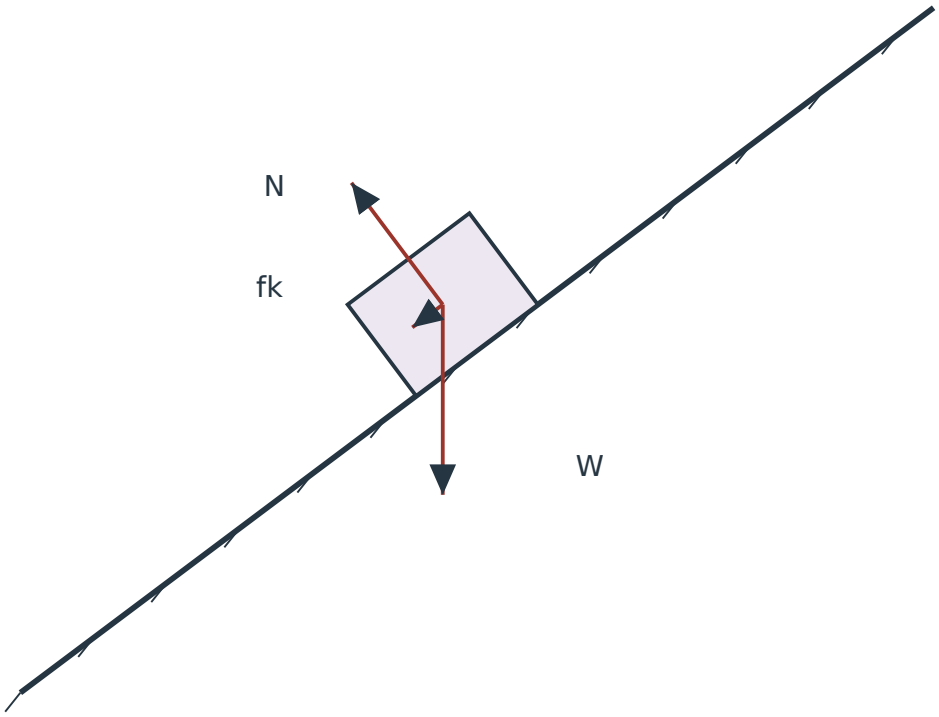


図 7　演習 5 の全力図。物体 A は斜面上向きに滑っている。W=20 N、N=16 N、下向きの動摩擦 fk=4.0 N。力の矢印は共通尺度 5 px/N。停止後の状態は表していない。

(3) 重力の斜面方向成分も動摩擦力も、斜面下向きである。

したがって、

$$ma_x = mg\sin\theta + f_k$$

となる。

数値を代入すると、

$$(2.0\,\mathrm{kg})a_x = 12\,\mathrm{N} + 4.0\,\mathrm{N} = 16\,\mathrm{N}$$

である。

よって、

$$a_x = \frac{16\,\mathrm{N}}{2.0\,\mathrm{kg}} = +8.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

加速度の向きは斜面下向きである。

(4) 速度は斜面上向き、加速度は斜面下向きであり、互いに逆向きである。そのため、物体が上向きに滑っている間は速さが減少する。

停止後は、静止摩擦力が働いて静止を保つ場合も、再び斜面下向きへ滑り出す場合も考えられる。

停止した瞬間を境に、滑りの状態が変わり得るため、上向きに滑っている間の運動方程式を停止後へ無条件に延長してはいけない。停止後の運動を判断するには、静止摩擦の限界などを別に調べる必要がある。

6

(1) 重力 W は物体に働く一つの外力である。W_x、W_y はその重力を、斜面に沿う方向と斜面に垂直な方向へ分けた成分である。

したがって、重力 W を成分に置き換えて計算することはできるが、W に加えて W_x と W_y を別々の外力として足すことはできない。

そうすると、同じ重力を二重に数えてしまうためである。

(2) 面から離れる向きを y 正とした場合、垂直方向の運動方程式は、

$$N - mg\cos\theta = ma_y$$

である。

ここから $N = mg\cos\theta$ とできるのは、固定された直線斜面との接触を保ち、$a_y = 0$ であり、さらに重力と垂直抗力以外に法線方向の外力がない場合である。

ほかに法線方向の外力がある場合や、垂直方向に加速度がある場合には、同じ式を無条件に使えない。

(3) 斜面上向きを新たに正とすると、もとの斜面下向きの加速度は負の符号で表される。

したがって、

$$a = -6.0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

物理的な加速度の向きは変わらず、**斜面下向き**である。符号が変わったのは座標の正方向を反転したためであり、物体に働く力や実際の運動を変更したわけではない。

(4) $\theta = 37^\circ$ を厳密な等式として用いるのは正しくない。

与えられた三角比から、

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.60}{0.80} = \frac{3}{4}$$

となる。

したがって、θ は $\tan\theta = \frac{3}{4}$ を満たす鋭角であり、約 36.87° である。

37° はその近似値なので、与えられた $\sin\theta = 0.60$、$\cos\theta = 0.80$ と厳密に同じ角として扱ってはいけない。

数値計算では、問題で指定された三角比を用いる。