第 231 講 三角形をベクトルで考える

学習目標

- 三角形の 2 辺に沿うベクトルを用いて、平面上の点を表せる。
- 係数の条件から、点が三角形の内部、周、外部のどこにあるかを判定できる。
- 3 頂点の位置ベクトルを、和が 1 になる係数で組み合わせて点を表せる。
- 三角形の重心の位置ベクトルを求め、中線を分ける比を説明できる。

1. 三角形の 2 辺を基準にする

三角形を基準にした点の表示

三角形 ABC の頂点 A, B, C の位置ベクトルを、それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。平面上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は、実数 s, t を用いると、次の式で表される。

$$\vec{p} = \vec{a} + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

この式では、s, t が 2 辺に沿う移動の倍率になる。

2 本の辺を新しい座標軸のように使う

$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$、$\vec{c} - \vec{a} = \overrightarrow{AC}$ である。点 A から、まず $\overrightarrow{AB}$ の s 倍だけ進み、次に $\overrightarrow{AC}$ の t 倍だけ進めば点 P に着く。
三角形の 3 頂点は一直線上にない。そのため $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行ではなく、この平面の異なる 2 方向を表す。したがって、どの点 P に対しても s, t がただ 1 組に定まる。

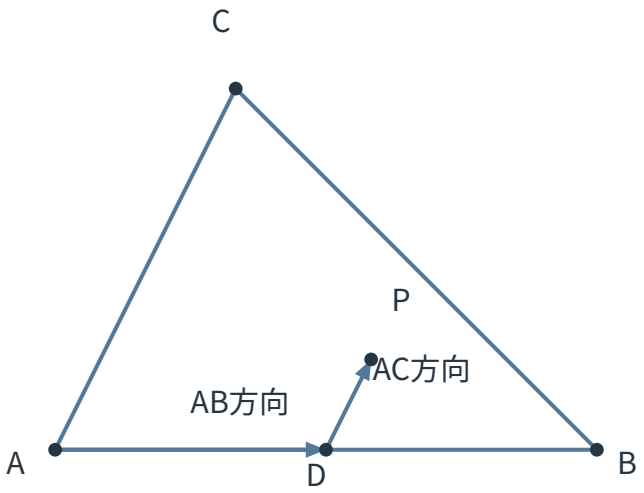

図 1　2 辺に沿う移動で点 P を作る

係数は辺に沿う移動の倍率

s は $\overrightarrow{AB}$ を単位とした移動の倍率、t は $\overrightarrow{AC}$ を単位とした移動の倍率である。例えば $s = \frac{1}{2}$、$t = \frac{1}{4}$ なら、A から AB の半分だけ進み、さらに AC の 4 分の 1 に等しいベクトルだけ進む。

©ミライコーチング

例題 1：2 辺を基準に点を求める

$A(1,1)$、$B(5,1)$、$C(2,4)$ とする。$\vec{p}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})$ で表される点 P の座標を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(4,0)$、$\vec{c}-\vec{a}=(1,3)$ である。各成分を比べる式は次のとおりである。

$$\vec{p}=(1,1)+\frac{1}{2}(4,0)+\frac{1}{3}(1,3)=\left(\frac{10}{3},2\right)$$

この計算から、$P\left(\frac{10}{3},2\right)$ である。

2. 三角形の内部を係数で表す

内部と周を表す 3 つの不等式

点 P を次の式で表す。

$$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$$

このとき、点 P が三角形 ABC の内部または周上にあるための条件は次のとおりである。

$$s\geq 0,\qquad t\geq 0,\qquad s+t\leq 1$$

内部にあるための条件では、3 つの不等号をすべて厳しくする。

$$s>0,\qquad t>0,\qquad s+t<1$$

この形では、3 頂点の係数を直接読み取れる。

3 本の辺と係数の関係

$t=0$ かつ $0\leq s\leq 1$ なら P は辺 AB 上にあり、$s=0$ かつ $0\leq t\leq 1$ なら辺 AC 上にある。この表示は、3 頂点を使って次のように書き換えられる。

$$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

この式で $s+t=1$ かつ $s,t\geq 0$ なら $\vec{a}$ の係数が 0 になるため、P は辺 BC 上にある。
三角形の内部または周上では、A,B,C の 3 頂点に対応する係数 $1-s-t,s,t$ がすべて 0 以上である。実際、$u=s+t>0$ として、辺 BC 上の点 R を次の式で定める。

$$\vec{r}=\frac{s}{u}\vec{b}+\frac{t}{u}\vec{c}$$

このとき、$\vec{p}=(1-u)\vec{a}+u\vec{r}$ である。$0<u\leq 1$ なら P は線分 AR 上にあり、$u=0$ なら $P=A$ である。逆に、三角形の内部または周上の点 $P\neq A$ から頂点 A を通る直線を引けば、P は辺 BC 上の点 R と A を結ぶ線分上にあるため、この形に戻せる。$P=A$ では $s=t=0$ とすればよい。どれかの係数が負なら、点は対応する辺の外側にある。

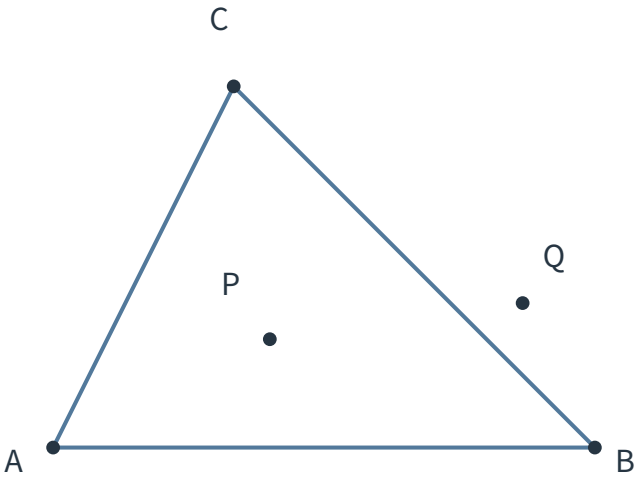

図 2　係数条件で区別する三角形の内側と外側

図の P は $(s,t)=(0.3,0.3)$ で $s+t=0.6<1$ となる内部の点である。Q は $(s,t)=\left(\frac{11}{15},0.4\right)$ で $s+t>1$ となり、辺 BC の外側にある。

境界を含むかを区別する

「三角形の内部」には辺や頂点を含めないため、係数はすべて正である。「三角形の内部または周上」や「三角形の領域」では辺や頂点を含むため、係数は 0 以上である。問題文の表現を確認することが大切である。

例題 2：点の位置を判定する

$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$ とする。次の点が三角形 ABC の内部、周上、外部のどこにあるか答えよ。
(1) $s=\frac{1}{4},\ t=\frac{1}{2}$ (2) $s=\frac{3}{5},\ t=\frac{2}{5}$ (3) $s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}$

例題 2 の解答・解説

(1)では $s>0, t>0, s+t=\frac{3}{4}<1$ であるから、内部にある。
(2)では $s>0, t>0, s+t=1$ であるから、辺 BC 上にある。
(3)では $s>0, t>0$ であるが、$s+t=\frac{5}{4}>1$ であるから、辺 BC に対して三角形の外側にある。

3. 3 頂点の重みで表す

3 頂点による表示

点 P の位置ベクトルが次の式で表されているとする。

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},\qquad x+y+z=1$$

ここで、x,y,z を 3 頂点 A,B,C に対する重みとみることができる。

2 係数表示とのつながり

$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$ を展開する。

$$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

この式から、$x=1-s-t, y=s, z=t$ とすればよい。3 係数の和は必ず 1 である。
三角形の内部または周上の点では $x,y,z\geq 0$ である。内部の点では $x,y,z>0$ である。さらに、他の 2 係数が 0 以上であるという条件のもとで、$x=0$ なら辺 BC 上、$y=0$ なら辺 CA 上、$z=0$ なら辺 AB 上である。

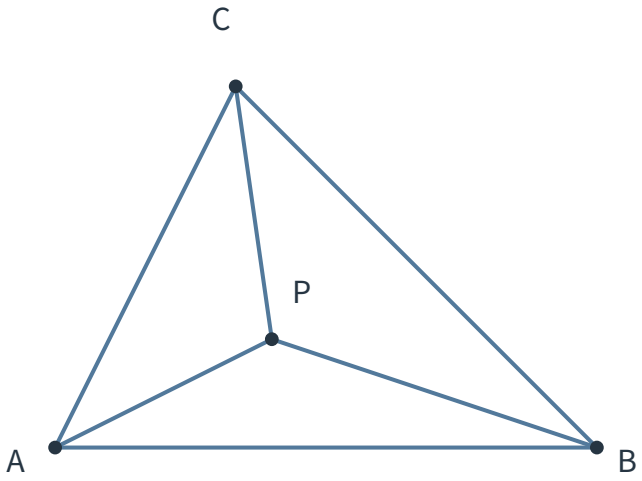

図 3　3 頂点の重みで表される内部の点 P

図の P は $0.4\vec{a}+0.3\vec{b}+0.3\vec{c}$ で表される。3 係数は正で、和は 1 であるから、P は内部にある。

係数の和が 1 である意味

原点を O から O' へ移し、$\overrightarrow{OO'}=\vec{q}$ とする。新しい位置ベクトルは $\vec{a}'=\vec{a}-\vec{q}$ などとなる。$x+y+z=1$ なら、移した原点に対する位置ベクトルは次のように計算できる。

$$x\vec{a}'+y\vec{b}'+z\vec{c}'=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\vec{q}$$

これは同じ点 P の新しい位置ベクトルである。係数の和 1 という条件によって、原点を替えても図形上の同じ点を表せる。

例題 3：3 頂点表示へ直す

$\vec{p}=\vec{a}+\frac{2}{5}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{1}{5}(\vec{c}-\vec{a})$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の重み付きの和で表し、点 P の位置を判定せよ。

例題 3 の解答・解説

式を展開する。

$$\vec{p}=\left(1-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

3 係数はすべて正で、和は 1 である。したがって、P は三角形 ABC の内部にある。

©ミライコーチング

4. 重心をベクトルで表す

三角形の重心

三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は次の式で表される。

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

3 頂点の重みがすべて $\frac{1}{3}$ である点とみることができる。

中線を 2 対 1 に分ける理由

辺 BC の中点を M とすると、$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ である。頂点 A から中点 M へ向かう中線上で、$AG : GM = 2 : 1$ となる点の位置ベクトルを計算する。

$$\vec{g} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

他の頂点から引いた中線でも同じ式が得られるため、3 本の中線はこの点 G で交わる。

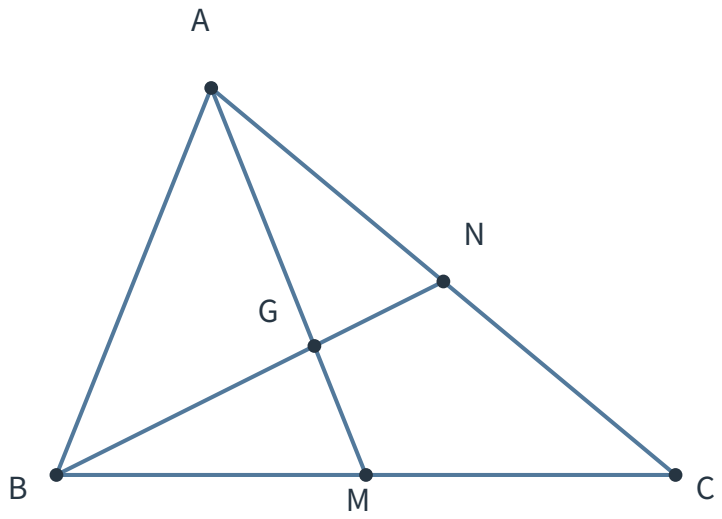

図 4　2 本の中線の交点としての重心 G

例題 4：重心の座標

$A(-2, 1)$、$B(4, 2)$、$C(1, 6)$ の重心 G の座標を求めよ。また、辺 BC の中点を M として $AG : GM$ を求めよ。

例題 4 の解答・解説

重心の位置ベクトルは 3 頂点の位置ベクトルの平均である。座標は次のように計算できる。

$$\vec{g} = \frac{(-2,1)+(4,2)+(1,6)}{3} = (1,3)$$

この計算から、$G(1,3)$ である。
中点は $M\left(\frac{5}{2},4\right)$ である。$\overrightarrow{AG}=(3,2)$、$\overrightarrow{GM}=\left(\frac{3}{2},1\right)$ であり、$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$ である。よって、$AG:GM=2:1$ である。

5. 演習問題

演習 1：係数から座標を求める

$A(0,1)$、$B(6,1)$、$C(2,5)$ とする。$\vec{p}=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{1}{4}(\vec{c}-\vec{a})$ で表される点 P の座標を求めよ。

演習 2：係数を求める

$A(1,0)$、$B(5,0)$、$C(1,3)$、$P(3,1)$ とする。$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$ を満たす s,t を求めよ。

演習 3：内部・周・外部の判定

$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$ とする。次の各組について、点 P が三角形 ABC の内部、周上、外部のどこにあるか答えよ。
(1) $(s,t)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ (2) $(s,t)=\left(0,\frac{3}{4}\right)$ (3) $(s,t)=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

演習 4：辺上の点の条件

$\vec{p}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t(\vec{c}-\vec{a})$ とする。点 P が辺 BC 上にあるための s,t の条件を答え、その理由を説明せよ。

演習 5：3 頂点表示へ直す

$\vec{p}=\vec{a}+\frac{1}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$ を $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ の形に直せ。

演習 6：重みから位置を判定する

点 P の位置ベクトルが $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$、$x+y+z=1$ と表されている。次の各組について、点 P の位置を判定せよ。
(1) $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ (2) $(x,y,z)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)$ (3) $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$

演習 7：重心を求める

$A(2,-1)$、$B(-4,5)$、$C(8,2)$ の重心 G の座標を求めよ。

©ミライコーチング

演習 8：中線上の点であることを示す

三角形 ABC の重心を G、辺 CA の中点を N とする。$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$、$\vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$ を用いて、B, G, N が一直線上にあり、$BG:GN=2:1$ であることを示せ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(6,0)$、$\vec{c}-\vec{a}=(2,4)$ である。位置ベクトルは次のように計算できる。

$$\vec{p}=(0,1)+\frac{1}{3}(6,0)+\frac{1}{4}(2,4)=\left(\frac{5}{2},2\right)$$

この計算から、$P\left(\frac{5}{2},2\right)$ である。

演習 2 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(4,0)$、$\vec{c}-\vec{a}=(0,3)$ である。各成分を比べる式は次のとおりである。

$$(3,1)=(1,0)+s(4,0)+t(0,3)$$

各成分を比べると、$1+4s=3$、$3t=1$ である。よって、$s=\frac{1}{2}$、$t=\frac{1}{3}$ である。

演習 3 の解答・解説

(1)では $s>0, t>0, s+t=\frac{3}{5}<1$ であるから、内部にある。
(2)では $s=0$、$0<t<1$ であるから、辺 AC 上にある。
(3)では $s<0$ であるから、外部にある。

演習 4 の解答・解説

辺 BC 上にあるための条件は次のとおりである。

$$s\geq 0,\qquad t\geq 0,\qquad s+t=1$$

この条件を式で確かめる。$s+t=1$ なら、位置ベクトルは次の式になる。

$$\vec{p}=s\vec{b}+t\vec{c}$$

$s, t\geq 0$ かつ $s+t=1$ であるため、P は B と C を結ぶ線分上にある。

演習 5 の解答・解説

式を展開する。

$$\vec{p}=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

この計算から、$(x,y,z)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ である。

演習 6 の解答・解説

(1)では 3 係数がすべて正で、和が 1 であるから、内部にある。
(2)では $z=0$ で他の 2 係数は 0 以上であるから、辺 AB 上にある。
(3)では $z<0$ であるから、外部にある。

演習 7 の解答・解説

重心の座標は 3 頂点の座標の平均である。座標は次のように計算できる。

$$G\left(\frac{2-4+8}{3}, \frac{-1+5+2}{3}\right) = (2, 2)$$

この計算から、重心は $G(2, 2)$ である。

演習 8 の解答・解説

B から N へ向かうベクトルは次の式で表される。

$$\overrightarrow{BN} = \vec{n} - \vec{b} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

次に、B から G へ向かうベクトルを計算する。

$$\overrightarrow{BG} = \vec{g} - \vec{b} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$$

この計算から、B, G, N は一直線上にあり、G は線分 BN を B 側から $\frac{2}{3}$ 進んだ点である。よって、$BG : GN = 2 : 1$ である。

©ミライコーチング