

第 30 講 軸と頂点

学習目標

- $y = a(x - p)^2 + q$ の形から、軸 $x = p$ と頂点 (p, q) を読み取れる。
- かっこの中の符号を正しく処理し、軸・頂点の x 座標を判断できる。
- 一般の二次関数を平方完成してから、軸と頂点を求められる。
- 求めた軸と頂点を、代入や対称性を使って検算できる。

軸と頂点は平行移動した位置を表す

$y = ax^2$ を基準に考える

二次関数 $y = ax^2$ のグラフは、 y 軸について左右対称で、原点 $(0, 0)$ を基準とする形でした。このグラフを右へ p 、上へ q 平行移動すると、

$$y = a(x - p)^2 + q$$

となります。

もとの対称の直線 $x = 0$ は $x = p$ へ移り、原点 $(0, 0)$ は (p, q) へ移ります。

したがって、 $y = a(x - p)^2 + q$ では、 $x = p$ が左右対称の中心となる直線で、 (p, q) がグラフの折り返し位置になります。

軸と頂点

二次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフについて、直線 $x = p$ を軸、点 (p, q) を頂点といいます。

$y = a(x - p)^2 + q$ から読む

二次関数

$$y = a(x - p)^2 + q$$

では、軸は $x = p$ 、頂点は (p, q) です。

係数 a はグラフの開く向きや広がり方に関係しますが、軸と頂点の位置は p, q から読み取ります。

符号は「かっこの中が 0 になる値」で判断する

$x - p$ の形へ合わせる

たとえば、

$$y = 2(x - 3)^2 + 4$$

では、かっこの中が 0 になるのは $x = 3$ です。

したがって、軸は $x = 3$ 、頂点は $(3, 4)$ です。

一方、

$$y = 2(x + 3)^2 + 4$$

では、 $x + 3 = 0$ となるのは $x = -3$ です。

したがって、軸は $x = -3$ 、頂点は $(-3, 4)$ です。

かっこの中の数をそのまま読むのではなく、かっこの中が 0 になる x を求めると符号を間違えにくくなります。

プラスなら正とは限らない

$y = a(x+5)^2 + 2$ の軸は $x = 5$ ではありません。

$x+5 = x - (-5)$ なので、

$$y = a(x - (-5))^2 + 2$$

と見れば、軸は $x = -5$ 、頂点は $(-5, 2)$ と分かります。

符号を確かめる方法

- $x - 4 = 0$ なら $x = 4$
- $x + 4 = 0$ なら $x = -4$

軸の x 座標は、かっこの中を 0 にして確かめます。

グラフで軸と頂点を確認する**軸をはさんで左右対称になる**

二次関数

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

では、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -1)$ です。

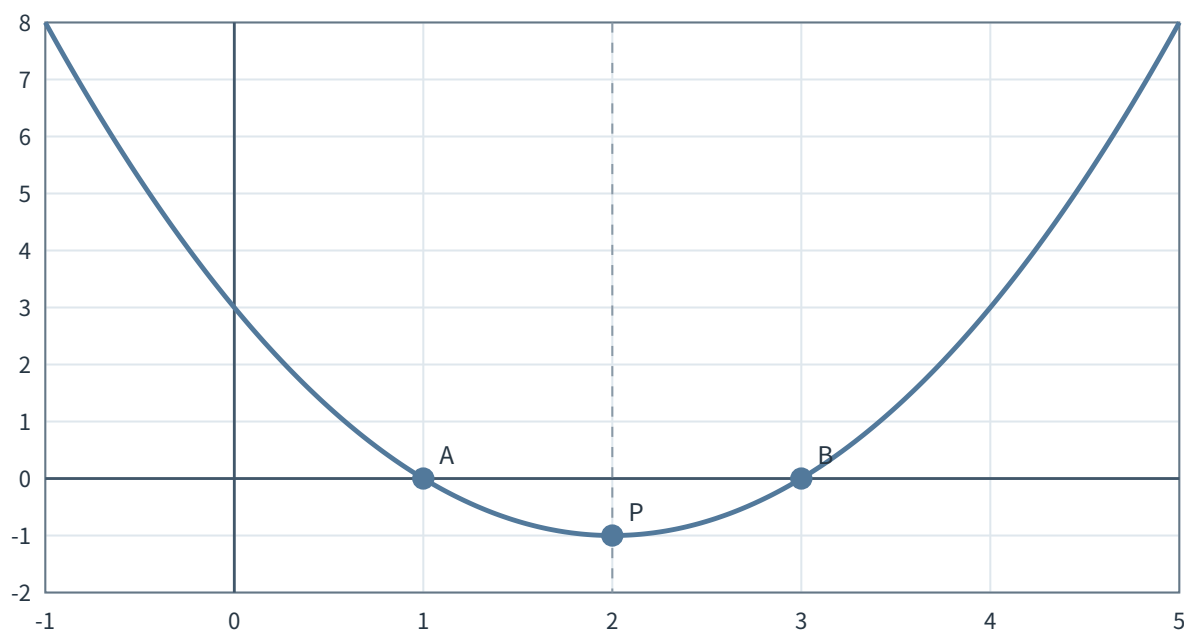


図 1 軸 $x = 2$ 、頂点 $(2, -1)$ のグラフ

点 $(1, 0)$ と $(3, 0)$ は、軸 $x = 2$ から左右に同じ距離だけ離れています。

このように、軸をはさんで左右対称になることは、軸を確かめる手掛かりになります。

一般の二次関数では平方完成してから読む**読める形へ変形する**

二次関数

$$y = x^2 - 6x + 5$$

は、そのままでは軸と頂点を読み取りにくい形です。

前講で学んだ平方完成を使うと、

$$y = (x - 3)^2 - 4$$

となります。

ここまで変形すれば、軸は $x = 3$ 、頂点は $(3, -4)$ と読み取れます。

この講では、平方完成そのものよりも、完成した式から軸と頂点を正しく読むことを重視します。

一般形から求める手順

1. 平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ の形にする。
2. かっこの中が 0 になる $x = p$ を確認する。
3. 軸を $x = p$ とする。
4. 頂点を (p, q) とする。

頂点は代入して検算できる

頂点の x 座標を式へ入れる

二次関数

$$y = 2(x - 3)^2 - 5$$

の頂点は $(3, -5)$ です。

$x = 3$ を代入すると、

$$y = 2(3 - 3)^2 - 5 = -5$$

となります。

確かに $(3, -5)$ はグラフ上の点です。

軸と頂点を求めた後に、頂点の x 座標を式へ代入すると、符号や定数項のミスを見つけやすくなります。

軸と頂点の検算

求めた後は、次の 2 つを確認できます。

- ・ 頂点の x 座標を代入すると、頂点の y 座標になるか。
- ・ 軸から左右に同じ距離だけ離れた x で、 y の値が等しくなるか。

対称性で確かめる

$y = (x - 1)^2 + 2$ の軸は $x = 1$ です。

軸から左へ 2 の $x = -1$ では $y = 6$ 、右へ 2 の $x = 3$ でも $y = 6$ です。

左右で同じ高さになるので、 $x = 1$ が軸であることを確認できます。

例題

例題 1

次の二次関数の軸と頂点を求めなさい。

(1) $y = 2(x - 4)^2 + 3$

(2) $y = -(x + 2)^2 + 5$

例題 1 の解答・解説

(1) $x - 4 = 0$ となるのは $x = 4$ です。

したがって、軸は $x = 4$ 、頂点は $(4, 3)$ です。

(2) $x + 2 = 0$ となるのは $x = -2$ です。

したがって、軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, 5)$ です。

例題 2

二次関数

$$y = x^2 + 4x - 1$$

の軸と頂点を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x + 2)^2 - 5$$

です。

$x + 2 = 0$ となるのは $x = -2$ です。

したがって、軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, -5)$ です。

検算として $x = -2$ を元の式へ代入すると $y = -5$ となり、頂点の y 座標と一致します。

例題 3

二次関数

$$y = 2x^2 - 8x + 1$$

の軸と頂点を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = 2(x - 2)^2 - 7$$

です。

したがって、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -7)$ です。

$x = 2$ を元の式へ代入すると $y = -7$ となるので、頂点も確認できます。

演習問題

練習問題 1

次の二次関数の軸と頂点を求めなさい。

(1) $y = (x - 5)^2 + 2$

(2) $y = (x + 4)^2 - 3$

練習問題 2

次の二次関数の軸と頂点を求めなさい。

(1) $y = 3(x - 2)^2 - 1$

(2) $y = -2(x + 3)^2 + 4$

練習問題 3

二次関数

$$y = x^2 - 8x + 10$$

の軸と頂点を求めなさい。

練習問題 4

二次関数

$$y = x^2 + 6x + 4$$

の軸と頂点を求めなさい。

練習問題 5

二次関数

$$y = 2x^2 + 12x + 7$$

の軸と頂点を求めなさい。

練習問題 6

二次関数

$$y = -x^2 + 4x + 3$$

の軸と頂点を求めなさい。

その後、頂点の x 座標を元の式へ代入して検算しなさい。

練習問題 7

二次関数 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 軸を求めなさい。
- (2) 頂点を求めなさい。
- (3) $x = -3$ と $x = 1$ のときの y の値をそれぞれ求め、対称性を確かめなさい。

練習問題 8

ある生徒は、

$$y = 3(x + 2)^2 - 5$$

の軸を $x = 2$ 、頂点を $(2, -5)$ と答えました。

この答えの誤りを説明し、正しい軸と頂点を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) $x - 5 = 0$ となるのは $x = 5$ です。
したがって、軸は $x = 5$ 、頂点は $(5, 2)$ です。
- (2) $x + 4 = 0$ となるのは $x = -4$ です。
したがって、軸は $x = -4$ 、頂点は $(-4, -3)$ です。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $y = 3(x - 2)^2 - 1$ なので、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, -1)$ です。
- (2) $x + 3 = 0$ となるのは $x = -3$ です。
したがって、軸は $x = -3$ 、頂点は $(-3, 4)$ です。

練習問題 3 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x - 4)^2 - 6$$

です。

したがって、軸は $x = 4$ 、頂点は $(4, -6)$ です。

練習問題 4 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = (x + 3)^2 - 5$$

です。

$x + 3 = 0$ となるのは $x = -3$ です。

したがって、軸は $x = -3$ 、頂点は $(-3, -5)$ です。

練習問題 5 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = 2(x + 3)^2 - 11$$

です。

したがって、軸は $x = -3$ 、頂点は $(-3, -11)$ です。

練習問題 6 の解答・解説

平方完成すると、

$$y = -(x - 2)^2 + 7$$

です。

したがって、軸は $x = 2$ 、頂点は $(2, 7)$ です。

検算として $x = 2$ を元の式へ代入すると、 $y = -4 + 8 + 3 = 7$ となります。

頂点の y 座標と一致しています。

練習問題 7 の解答・解説

(1) $x + 1 = 0$ となるのは $x = -1$ なので、軸は $x = -1$ です。

(2) 頂点は $(-1, -3)$ です。

(3) $x = -3$ のとき $y = 2(-2)^2 - 3 = 5$ です。

$x = 1$ のときも $y = 2(2)^2 - 3 = 5$ です。

-3 と 1 は軸 $x = -1$ から同じ距離にあり、関数の値も等しくなっています。

練習問題 8 の解答・解説

誤りは、 $x + 2$ の $+2$ をそのまま頂点の x 座標として読んだことです。

かっこの中が 0 になる値を調べると、 $x + 2 = 0$ より $x = -2$ です。

したがって、正しい軸は $x = -2$ 、頂点は $(-2, -5)$ です。