第 041 講 単振動の運動を読む

この講でできるようになること

- 単振動を円運動の投影として捉え、変位・速度・加速度の関係を説明できる。
- 振幅・周期・振動数・位相の意味を区別し、運動を式とグラフで表せる。
- 共通の時刻における変位・速度・加速度の値と符号を対応させられる。
- 同じ位置を通過するときの運動方向の違いや、振幅・周期・初期位相の変更による違いを判断できる。

1. 往復運動を円運動から考える

物体が右へ動き、折り返して左へ動き、また右へ戻る。この往復運動が一定の時間ごとに繰り返される場面を考える。

単純な往復に見えても、物体の速さは一定ではない。端に近づくと遅くなり、中心付近では速くなる。

このような運動のうち、変位が時間とともに正弦・余弦の形で変化する運動を**単振動**という。

1.1 中心・振幅・周期

物体が一直線上を往復するものとし、中心を原点 $x=0$、右向きを正と定める。

単振動を表す基本量

- **変位** x：中心からどちら向きにどれだけ離れているかを表す。単位は m。
- **振幅** A：中心から端までの最大の距離。$A>0$ とする。
- **周期** T：運動が同じ状態に戻るまでの 1 往復の時間。$T>0$ とし、単位は s。
- **振動数** f：1 秒間に何回振動するかを表す。単位は Hz。

右端は $x=+A$、左端は $x=-A$ である。

振幅が 2 m なら、中心からそれぞれの端までの距離は 2 m、端から端までの距離は 4 m となる。

振幅 A と端から端の距離 $2A$ は異なる。

周期と振動数は次の関係にある。

$$f=\frac{1}{T}$$

たとえば、4 s で 1 往復する場合、振動数は

$$f=\frac{1}{4\,\mathrm{s}}=0.25\,\mathrm{Hz}$$

である。

1.2 円の点を直線へ映す

単振動の動きを理解するため、半径 A の円周上を一定の速さで反時計回りに動く補助点 P を考える。

円の中心を O とし、点 P から横方向の x 軸へ垂線を下ろす。その足を H とする。

点 P が円を一周すると、点 H は x 軸上の $-A$ から $+A$ の間を一往復する。

©ミライコーチング

この **点 H の横方向の動きが単振動**である。

以下の図では、半径を $A = 2\,\mathrm{m}$ とし、点 P が正の x 軸から反時計回りに 60° の位置にある場合を示す。下部の速度・加速度の矢印は点 H に対応する量である。

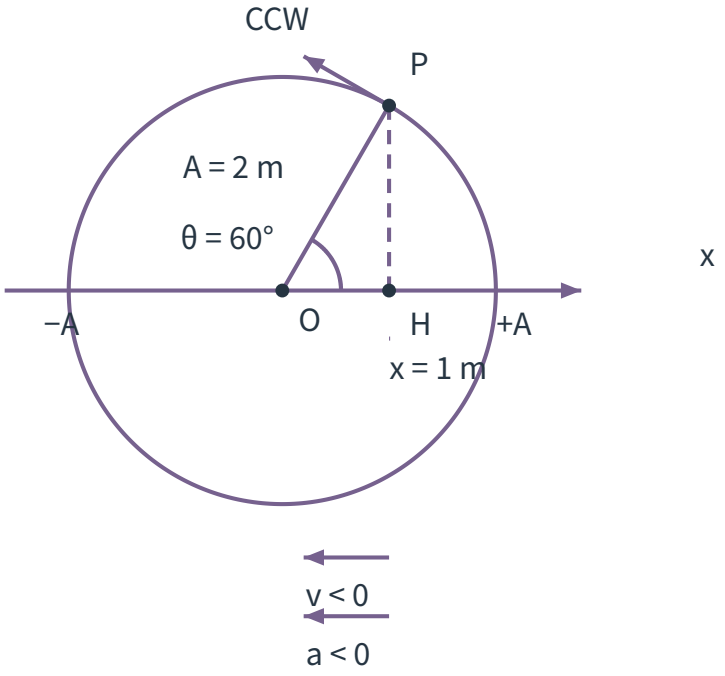

図 1　反時計回りの等速円運動を x 軸へ投影した模式図。円の接線方向と H の運動方向を区別する。下部の矢印長で速度と加速度の大きさは比較しない。

ここで重要なのは、**円周上を動く P と、直線上を動く H は別の点**だということである。

実際の物体が円を描きながら動く必要はない。円運動は、単振動の位置・速度・加速度を理解するための補助的なモデルである。

1.3 角度から変位を表す

半径 OP と正の x 軸のなす角を θ とする。

角度は正の x 軸から反時計回りを正とし、右向きの投影距離は三角比の余弦 $\cos\theta$ を使って表せる。

$$x = A\cos\theta$$

たとえば、$A = 2\,\mathrm{m}$、$\theta = 60^\circ$ のとき、

$$x = (2\,\mathrm{m}) \times \frac{1}{2} = 1\,\mathrm{m}$$

となる。

円運動の角度を時間と結びつけよう。

半径が正の x 軸から反時計回りに一周すると、角度は 360° 増える。

角度を弧度法で表すと一周は 2π rad であり、

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$$

である。

1 rad は角度の単位であり、式では通常ラジアンを使う。度数法の 60 をそのまま $\cos 60$ のようにラジアン用の式へ代入しない。

周期 T で一周する補助円の角速度を ω（オメガ）とすると、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

となる。単位は rad/s である。

時刻 $t = 0$ に点 P が正の x 軸から角度 ϕ の位置にある場合、

$$\theta = \omega t + \phi$$

と表せる。ϕ は**初期位相**といい、時刻 0 での角度を表す。

θ はその時刻の位相であり、ϕ は運動の始まり方を定める値である。

単振動の変位の式

中心を $x = 0$、右向きを正とする単振動は、

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

で表せる。

ここで、

- A：振幅（m）
- ω：角振動数（rad/s）
- t：時刻（s）
- ϕ：初期位相（rad）

であり、$\omega = 2\frac{\pi}{T}$ である。

初期位相が $\phi = 0$ なら、$t = 0$ において

$$x = A\cos 0 = A$$

となり、右端から運動を始める。

一方、$\phi = \frac{\pi}{2}$ なら、$t = 0$ では中心 $x = 0$ にいる。

同じ振幅・周期でも、初期位相によって同じ時刻の位置や運動方向が変わる。

2. 変位・速度・加速度をつなぐ

2.1 円運動の接線方向から速度を考える

補助円の点 P は、円周の接線方向へ動く。

円運動の半径は A、角速度は ω なので、点 P の速さは一定で、

$$A\omega$$

となる。

しかし、その横方向の成分は一定ではない。

角度 θ において、反時計回りの接線方向の横成分は $-\sin\theta$ に比例する。

したがって、点 H の符号付き速度 v は

$$v = -A\omega\sin\theta$$

である。

$\theta = \omega t + \phi$ を代入すると、

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

となる。

この関係は、円運動の接線速度を横方向へ投影して得られる。ここでは微分を使う必要はない。

たとえば、図の $\theta = 60^\circ$ では $\sin 60^\circ > 0$ だから、

$$v < 0$$

である。点 P は円の左上方向へ動いており、その投影 H は左向きへ動く。

速度の符号と速さ

v は右向きを正とした速度であり、負なら左向きを表す。

速さは $|v|$ である。

たとえば、$v = -3\,\mathrm{m/s}$ は左向きに $3\,\mathrm{m/s}$ で動くことを意味し、「速さが負」という意味ではない。

2.2 向心加速度の投影から加速度を考える

等速円運動の点 P には、円の中心 O へ向かう向心加速度がある。

その大きさは

$$A\omega^2$$

である。

点 P の中心向き加速度を横方向へ投影すると、その成分は

$$a = -A\omega^2\cos\theta$$

となる。

$x = A\cos\theta$ なので、

$$a = -\omega^2 x$$

が得られる。

単振動の速度と加速度

単振動の変位が

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

のとき、速度と加速度は

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

である。

速度の単位は $\mathrm{m/s}$、加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

加速度の式に注目しよう。

$$a = -\omega^2 x$$

ω^2 は正なので、$x \neq 0$ では x と a の符号は反対になり、$x = 0$ では $a = 0$ になる。

- $x > 0$ のとき、$a < 0$：右側にいる物体の加速度は左向き。
- $x < 0$ のとき、$a > 0$：左側にいる物体の加速度は右向き。
- $x = 0$ のとき、$a = 0$：中心では加速度が 0。

つまり、**単振動の加速度は、中心から離れた位置では常に中心向き**である。

ただし、加速度が中心向きだからといって、速度も必ず中心向きとは限らない。物体が中心から遠ざかっている途中でも、加速度は中心を向く。

2.3 端と中心で何が起きるか

右端・中心・左端の状態を見比べる。

位置	速度	加速度	運動の特徴
右端 $x = +A$	0	$-A\omega^2$	左向きへ折り返す
中心 $x = 0$	$+A\omega$ または $-A\omega$	0	速さが最大
左端 $x = -A$	0	$+A\omega^2$	右向きへ折り返す

端では一瞬だけ速度が 0 になるが、加速度は 0 ではない。むしろ、その大きさは最大となる。

中心では加速度が 0 になるが、物体が停止するわけではない。速さが最大となり、そのまま中心を通過する。

位置・速度・加速度を別々に読む

- **端**：速度は 0、加速度の大きさは最大。
- **中心**：加速度は 0、速さは最大。
- **同じ位置**：加速度は同じだが、速度は右向き・左向きの両方があり得る。

速度が 0 であることと、加速度が 0 であることは別の条件である。

3. 時間グラフを同じ時刻で読む

ここでは具体的に、

$$A = 2\,\mathrm{m}, \qquad T = 4\,\mathrm{s}, \qquad \phi = 0$$

の場合を考える。

角振動数は

$$\omega = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

したがって、

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$v = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$a = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

となる。ここで t は s 単位の時刻であり、各式が表す物理量の単位は順に m、m/s、m/s^2 である。

3.1 変位–時刻グラフ

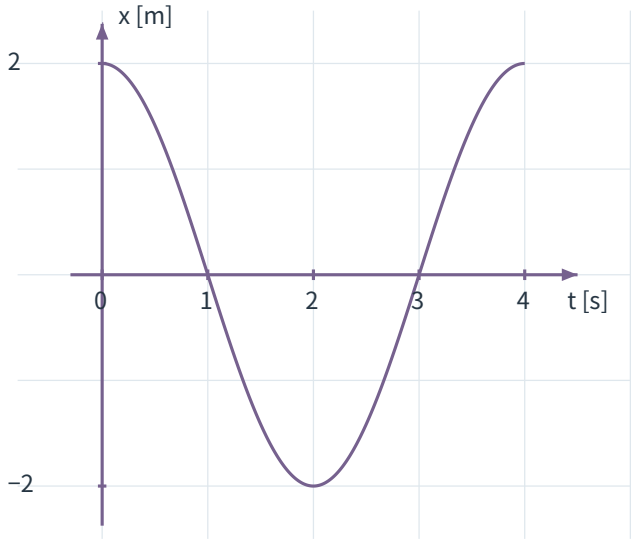

図 2　変位 x と時刻 t の関係。0 s で右端、2 s で左端、4 s で右端へ戻る。

このグラフでは、$t = 0\,\mathrm{s}$ に右端 $x = +2\,\mathrm{m}$ から出発する。

$t = 1\,\mathrm{s}$ で中心を通り、$t = 2\,\mathrm{s}$ に左端へ到達する。その後、$t = 3\,\mathrm{s}$ に中心を通り、$t = 4\,\mathrm{s}$ で右端へ戻る。

横軸は時刻であり、**波形そのものが物体の空間内の軌道ではない**。物体は横一直線上を往復している。

3.2 速度–時刻グラフ

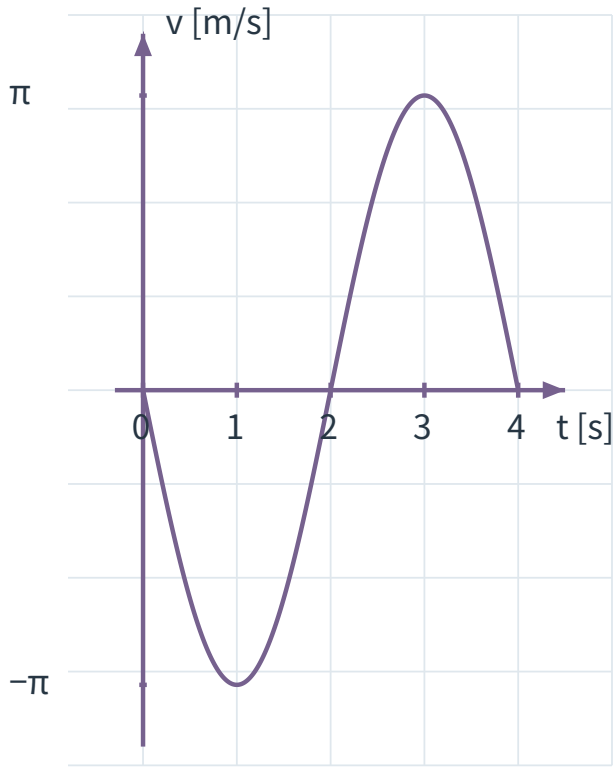

図 3　速度 v と時刻 t の関係。負は左向き、正は右向きを表す。

速度は最初の半周期で負となり、物体が左向きに動くことを表す。

$t = 1\,\mathrm{s}$ のとき、

$$v = -\pi\,\mathrm{m/s}$$

であり、左向きの速さが最大である。

$t = 2\,\mathrm{s}$ では速度が 0 になり、左端で折り返す。

$t = 3\,\mathrm{s}$ では

$$v = +\pi\,\mathrm{m/s}$$

となり、右向きに最大の速さで動く。

速度の最大の大きさは

$$|\,v\,|_{\max} = A\omega$$

である。

3.3 加速度–時刻グラフ

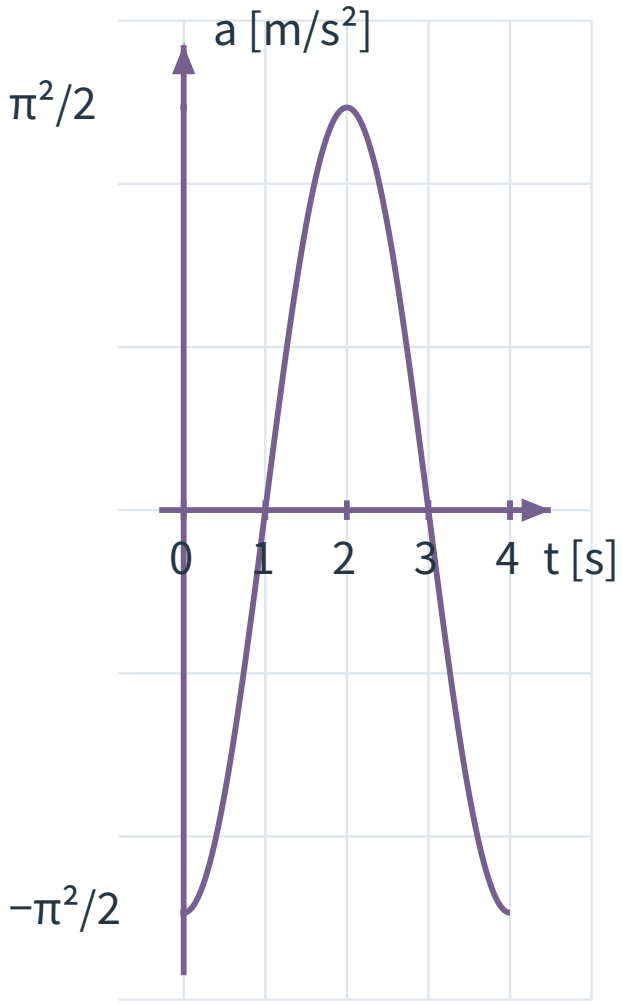

図 4　加速度 a と時刻 t の関係。変位と符号が反対になり、端で大きさが最大となる。

加速度は変位と反対の符号で変化する。

$t = 0\,\mathrm{s}$ で右端にいるときは負、$t = 2\,\mathrm{s}$ で左端にいるときは正である。

加速度の最大の大きさは

$$|\,a\,|_{\max} = A\omega^2$$

である。

3.4 共通の時刻で 3 つの量を比べる

3 つのグラフを読むときは、同じ時刻の縦軸の値を対応させる。

時刻 t	変位 x（m）	速度 v（m/s）	加速度 a（m/s²）
$0\,\mathrm{s}$	$+2$	0	$-\frac{\pi^2}{2}$
$1\,\mathrm{s}$	0	$-\pi$	0
$2\,\mathrm{s}$	-2	0	$+\frac{\pi^2}{2}$
$3\,\mathrm{s}$	0	$+\pi$	0
$4\,\mathrm{s}$	$+2$	0	$-\frac{\pi^2}{2}$

同じ位置 $x=0$ を通る $t=1\,\mathrm{s}$ と $t=3\,\mathrm{s}$ に注目しよう。

どちらも変位と加速度は 0 だが、速度の符号は異なる。

位置だけでは、物体がどちら向きに通過しているかは決まらないのである。

異なるグラフの高さを直接比較しない

変位の単位は m、速度は m/s、加速度は $\mathrm{m/s^2}$ である。

3 つのグラフは縦軸の単位も目盛の尺度も異なる。したがって、見かけの波の高さだけで速度と加速度の大きさを比べることはできない。

比較すべきなのは、同じ時刻における符号、零点、極値、それぞれの物理量の意味である。

3.5 位相のずれを読む

変位と速度は、同じタイミングで最大にならない。

今回の $\phi=0$ の式は、

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t)$$

である。

三角関数の関係

$$-\sin\theta = \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

を使えば、速度を

$$v = A\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表せる。

変位の波形と比べると、速度の波形は角度 $\frac{\pi}{2}$、時間では $\frac{T}{4}$ だけ進んでいる。

これは、**この余弦を基準にした表し方での比較**である。

また、

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t) = A\omega^2\cos(\omega t+\pi)$$

なので、加速度と変位は半周期分ずれ、中心以外では符号が反対になる。中心では両方とも 0 になる。

それぞれの縦軸の単位を無視して波形を重ねるのではなく、山・谷・零点がいつ現れるかを比較する。

4. 例題で運動を読み取る

例題 1｜周期と共通時刻

中心 $x=0$ を基準に右向きを正とする単振動がある。

振幅 $A=2\,\mathrm{m}$、周期 $T=4\,\mathrm{s}$ で、時刻 $t=0$ に右端から出発する。初期位相は $\phi=0$ とする。

例題 1(1) 振動数 f と角振動数 ω を求めよ。

例題 1(2) 変位 x、速度 v、加速度 a を時間 t の式で表せ。

例題 1(3) $t=1\,\mathrm{s}$ と $t=2\,\mathrm{s}$ の位置・速度・加速度を求め、それぞれの運動の様子を説明せよ。

解答・解説

例題 1(1) 周期が 4 s なので、

$$f = \frac{1}{4\,\mathrm{s}} = 0.25\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

となる。

例題 1(2) $\phi = 0$ を用いる。

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$v = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$a = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

である。t の単位は s、各式の左辺の単位は順に m、m/s、$\mathrm{m/s^2}$ である。

例題 1(3) $t = 1\,\mathrm{s}$ では位相が $\frac{\pi}{2}$ となる。

$$x = 0\,\mathrm{m}$$

$$v = -\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$a = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。中心を左向きに最大の速さで通過している。

$t = 2\,\mathrm{s}$ では位相が π となる。

$$x = -2\,\mathrm{m}$$

$$v = 0\,\mathrm{m/s}$$

$$a = +\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}$$

である。左端で一瞬停止し、右向きへ折り返す。

端で速度が 0 でも加速度は正である点が重要である。

例題 2｜同じ位置を逆向きに通る

振幅 $A = 2\,\mathrm{m}$、周期 $T = 4\,\mathrm{s}$、初期位相 $\phi = 0$ の単振動を考える。中心を原点とし、右向きを正とする。

この物体が $x = +1\,\mathrm{m}$ を通過する 2 つの場面を考える。

一方は補助円の位相が $\theta = \frac{\pi}{3}$、もう一方は $\theta = 5\frac{\pi}{3}$ のときである。補助円は反時計回りに動く。

例題 2(1) 2 つの場面で変位が等しい理由を説明せよ。

例題 2(2) それぞれの速度を符号付きで求めよ。

例題 2(3) それぞれの加速度を求め、同じになる理由を説明せよ。

解答・解説

例題 2(1)の解答・解説

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$x = (2\,\mathrm{m}) \times \frac{1}{2} = 1\,\mathrm{m}$$

となる。

円の上側に点 P がいる場合と、下側にいる場合であっても、横方向への投影位置は等しい。

例題 2(2) 角振動数は

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

なので、

$$A\omega = \pi\,\mathrm{m/s}$$

である。

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、

$$v = -\pi \sin\frac{\pi}{3}\,\mathrm{m/s}$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

となり、左向きである。

一方、$\theta = 5\frac{\pi}{3}$ のとき、

$$v = -\pi \sin\frac{5\pi}{3}\,\mathrm{m/s}$$

$$= +\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

となり、右向きである。

速さはいずれも $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$ である。

次の図は、2 つ目の場面を表す。角度 $\theta = -60^\circ$ は $\theta = 300^\circ$ と同じ円周上の位置を示し、反時計回りに進む円運動では一周内の位相 $5\frac{\pi}{3}$ に対応する。

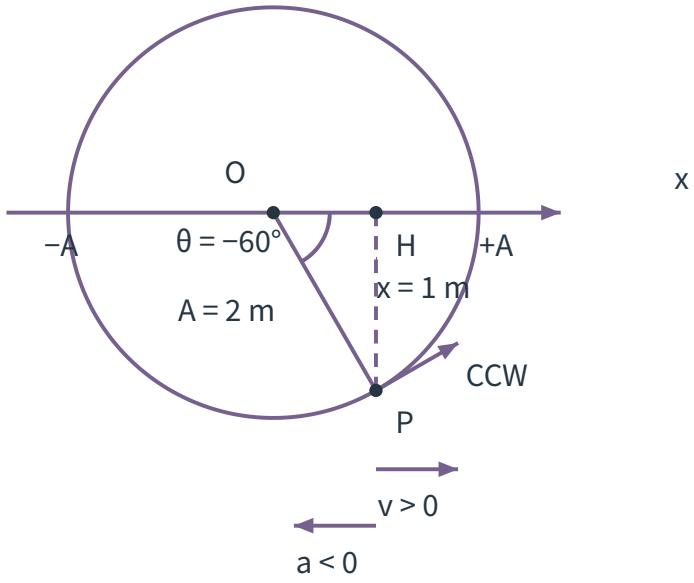

図 5　θ が−60°（300°）の場面。投影位置は 60°のときと同じだが速度は右向きとなる。矢印長で速度と加速度の大きさは比較しない。

先ほどの $\theta = 60^\circ$ の図と比べると、どちらも H は $x = +1\,\mathrm{m}$ にある。しかし、上側の P は左上へ、下側の P は右上へ動くため、横方向の速度の符号が反対になる。

例題 2(3) 加速度は位置だけから

$$a = -\omega^2 x$$

で求められる。

$$a = -\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}\right)^2 (1\,\mathrm{m})$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

どちらも $x = +1\,\mathrm{m}$ にいるので、加速度は同じ左向きである。

2 つの場面を整理すると、

位相	変位 x	速度 v	加速度 a
$\frac{\pi}{3}$（60°）	$+1\,\mathrm{m}$	$-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$	$-\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{m/s^2}$
$5\frac{\pi}{3}$（300°）	$+1\,\mathrm{m}$	$+\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$	$-\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{m/s^2}$

となる。

位置が等しくても速度の符号は異なり得るが、加速度は $a=-\omega^2x$ により一意に決まる。

例題 3｜振幅・周期・初期位相

基準となる単振動は、

$$A=2\,\mathrm{m},\qquad T=4\,\mathrm{s},\qquad \phi=0$$

である。中心と右向きの正方向は共通とする。

例題 3(1) 周期を保ったまま振幅を $4\,\mathrm{m}$ に変更したとき、速度と加速度の最大の大きさはどう変わるか。

例題 3(2) 振幅を保ったまま周期を $8\,\mathrm{s}$ に変更したとき、角振動数、速度と加速度の最大の大きさはどう変わるか。

例題 3(3) 振幅・周期を基準のまま、初期位相だけを $\phi=\frac{\pi}{2}$ に変更したとき、$t=0$ の変位・速度・加速度を求めよ。

解答・解説

例題 3(1) 最大の速さと加速度の大きさは、

$$|\,v\,|_{\max}=A\omega,\qquad |\,a\,|_{\max}=A\omega^2$$

である。

周期が同じなら ω は同じなので、A が 2 倍になると、両方とも 2 倍となる。

基準では

$$|\,v\,|_{\max}=\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$|\,a\,|_{\max}=\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

変更後は

$$|\,v\,|_{\max}=2\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$|\,a\,|_{\max}=\pi^2\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。周期は変わらない。

例題 3(2) 周期が 2 倍になるので、

$$\omega = \frac{2\pi}{8\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s}$$

となり、角振動数は半分である。

したがって、速度の最大の大きさは半分、加速度の最大の大きさは 4 分の 1 となる。

変更後は

$$|\,v\,|_{\max} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$$

$$|\,a\,|_{\max} = \frac{\pi^2}{8}\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

例題 3(3) 時刻 $t = 0$ では、位相は $\frac{\pi}{2}$ である。

$$x = (2\,\mathrm{m})\cos\frac{\pi}{2} = 0\,\mathrm{m}$$

$$v = -(\pi\,\mathrm{m/s})\sin\frac{\pi}{2} = -\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

基準の運動は右端から始まるが、初期位相を $\frac{\pi}{2}$ にすると中心から左向きに動き始める。

初期位相の変更は運動を始めるタイミングの違いであり、振幅や周期そのものは変わらない。

5. 運動の見方を深める

5.1 速度が 0 でも運動は終わらない

単振動では、端に到達した瞬間に速度が 0 になる。

しかし、加速度は中心向きであり、物体はそのまま逆向きへ動き始める。

たとえば右端では、

$$x = +A, \qquad v = 0, \qquad a = -A\omega^2$$

である。

この瞬間の速度だけを見て「動かなくなった」と判断してはいけない。

5.2 同じ位置を通る時刻は 2 つある

両端を除く位置では、中心も含めて 1 周期の間に 2 回、同じ変位となる。

右端から左端へ向かう途中と、左端から右端へ戻る途中である。

そのため、変位 x だけが与えられた場合、加速度 $a = -\omega^2 x$ は求められても、速度 v の符号を決めるには、運動の向きや位相などの情報が必要となる。

一方、速度の**大きさ**は、変位・振幅・角振動数から求められる。

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

これは

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

と、$x = A\cos\theta$、$|v| = A\omega|\sin\theta|$ を組み合わせた関係である。

たとえば $A = 2\,\mathrm{m}$、$\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$、$x = 1\,\mathrm{m}$ なら、

$$|v| = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s^{-1}}\sqrt{(2\,\mathrm{m})^2 - (1\,\mathrm{m})^2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

ただし、この式で得られるのは速さであり、速度の正負ではない。

単振動の読み取り順

単振動の状態を判断するときは、まず中心と正方向を決め、変位 x と運動の向きを区別する。

次に、$a = -\omega^2 x$ で加速度の向きを調べる。

速度については、位置だけで符号を決めず、進行方向または位相を確認する。

演習問題

演習 1｜式から運動を読む

中心 $x = 0$、右向きを正とする単振動がある。

振幅 $A = 1.5\,\mathrm{m}$、周期 $T = 6\,\mathrm{s}$、初期位相 $\phi = 0$ とする。

演習 1(1) 振動数 f と角振動数 ω を求めよ。

演習 1(2) 変位 x、速度 v、加速度 a を時間 t の式で表せ。

演習 1(3) $t = 0\,\mathrm{s}$、$t = 1.5\,\mathrm{s}$、$t = 3\,\mathrm{s}$ の位置・速度・加速度をそれぞれ求めよ。

演習 1(4) この運動で速度の大きさが最大となる位置と、加速度の大きさが最大となる位置を答えよ。

解答・解説は「演習 1 の解答・解説」を参照。

演習 2｜同じ位置と異なる運動方向

振幅 $A = 2\,\mathrm{m}$、周期 $T = 4\,\mathrm{s}$、初期位相 $\phi = 0$ の単振動を考える。

中心は $x = 0$、右向きが正である。

物体が $x = +1\,\mathrm{m}$ を左向きに通過する場面と、右向きに通過する場面を比較する。

演習 2(1) 角振動数 ω を求めよ。

演習 2(2) 2 つの場面での速度をそれぞれ符号付きで求めよ。

演習 2(3) 2 つの場面での加速度を求めよ。

演習 2(4) 位置だけから速度の符号が決まらない理由を説明せよ。

解答・解説は「演習 2 の解答・解説」を参照。

演習 3｜初期位相を変える

振幅 $A = 2\,\mathrm{m}$、周期 $T = 4\,\mathrm{s}$ の単振動を考える。

中心は $x = 0$、右向きを正とする。初期位相を $\phi = \frac{\pi}{2}$ とする。

演習 3(1) 時刻 $t = 0$ の変位・速度・加速度を求めよ。

演習 3(2) 時刻 $t = 1\,\mathrm{s}$ の変位・速度・加速度を求めよ。

演習 3(3) 初期位相 $\phi = 0$ の運動と比較し、同じ時刻 $t = 0$ の位置と運動方向の違いを説明せよ。

演習 3(4) 初期位相だけを変えると、振幅と周期も変わるか。理由とともに答えよ。

解答・解説は「演習 3 の解答・解説」を参照。

演習 4｜振幅と周期の変更

基準となる単振動は、振幅 $A = 2\,\mathrm{m}$、周期 $T = 4\,\mathrm{s}$ である。

変更後の運動も中心と正方向は同じとし、次の 2 つの変更を別々に行う。

- 条件 Ⅰ：周期を $4\,\mathrm{s}$ のまま保ち、振幅を $4\,\mathrm{m}$ にする。
- 条件 Ⅱ：振幅を $2\,\mathrm{m}$ のまま保ち、周期を $8\,\mathrm{s}$ にする。

演習 4(1) 基準の運動の速度と加速度の最大の大きさを求めよ。

演習 4(2) 条件 Ⅰ で、振動数、速度と加速度の最大の大きさがどう変わるか説明せよ。

演習 4(3) 条件 Ⅱ で、角振動数、速度と加速度の最大の大きさがどう変わるか説明せよ。

演習 4(4) 条件 Ⅰ と条件 Ⅱ では、どちらも運動の端から端までの距離が基準より大きくなるか。数値を用いて説明せよ。

解答・解説は「演習 4 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習 5｜グラフの零点と極値

振幅 $A = 2\,\mathrm{m}$、周期 $T = 4\,\mathrm{s}$、初期位相 $\phi = 0$ の単振動を考える。

中心は $x = 0$、右向きが正である。

この運動の変位・速度・加速度は、本文 3 節で示した 3 つの時間グラフに従う。

演習 5(1) $t = 0\,\mathrm{s}$、$1\,\mathrm{s}$、$2\,\mathrm{s}$、$3\,\mathrm{s}$、$4\,\mathrm{s}$ の各時刻で、速度が 0 になる時刻をすべて答えよ。

演習 5(2) 同じ 5 つの時刻のうち、加速度が 0 になる時刻をすべて答えよ。

演習 5(3) $t = 1\,\mathrm{s}$ と $t = 3\,\mathrm{s}$ の共通点と相違点を、変位・速度・加速度について説明せよ。

演習 5(4) 変位・速度・加速度のグラフの見かけの縦方向の高さだけを比べ、物理量の大小関係を決定できない理由を説明せよ。

解答・解説は「演習 5 の解答・解説」を参照。

演習 6｜円運動の投影と位相

半径 $A = 3\,\mathrm{m}$ の補助円を、点 P が一定の速さで反時計回りに動いている。

円の中心を O とし、点 P から横方向の軸へ下ろした垂線の足を H とする。

この投影 H の運動を単振動として扱う。周期は $T = 6\,\mathrm{s}$、右向きが正である。

演習 6(1) 点 P が正の x 軸から反時計回りに 60° の位置にあるとき、H の変位を求めよ。

演習 6(2) このときの H の速度の向きと大きさを求めよ。

演習 6(3) このときの H の加速度の向きと大きさを求めよ。

演習 6(4) 円の点 P と直線上の点 H を同じ物体と考えてはいけない理由を説明せよ。

解答・解説は「演習 6 の解答・解説」を参照。

演習 7｜周期と折返しの判断

ある単振動では、時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ に右端から静かに動き始める。中心は $x = 0$、右向きを正とする。

速度が 0 になる時刻が $t = 0\,\mathrm{s}$、$2\,\mathrm{s}$、$4\,\mathrm{s}$ であり、この 3 つの時刻は連続する折返しの時刻である。

演習 7(1) 周期 T と振動数 f を求めよ。

演習 7(2) $t = 1\,\mathrm{s}$ の物体の位置と進行方向を答えよ。

演習 7(3) $t = 2\,\mathrm{s}$ に速度が 0 でも加速度が 0 とはならない理由を説明せよ。

演習 7(4) 速度が 0 になる時刻の間隔 $2\,\mathrm{s}$ を、そのまま周期と考えてよいか。理由とともに答えよ。

解答・解説は「演習 7 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 周期は 6 s なので、

$$f = \frac{1}{6\,\mathrm{s}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{6\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

演習 1(2) $\phi = 0$ より、

$$x = 1.5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$v = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$a = -\frac{\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

となる。

t は s 単位であり、左辺の単位は順に m、m/s、m/s^2 である。

演習 1(3) $t = 0\,\mathrm{s}$ では位相が 0 なので、

$$x = +1.5\,\mathrm{m}, \qquad v = 0\,\mathrm{m/s}, \qquad a = -\frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

$t = 1.5\,\mathrm{s}$ では位相が $\frac{\pi}{2}$ なので、

$$x = 0\,\mathrm{m}, \qquad v = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}, \qquad a = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

$t = 3\,\mathrm{s}$ では位相が π なので、

$$x = -1.5\,\mathrm{m}, \qquad v = 0\,\mathrm{m/s}, \qquad a = +\frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

演習 1(4) 速度の大きさが最大となるのは中心 $x = 0$ である。

加速度の大きさが最大となるのは両端 $x = +1.5\,\mathrm{m}$ と $x = -1.5\,\mathrm{m}$ である。

中心では $a = 0$ だが速さは最大、両端では $v = 0$ だが加速度の大きさが最大となる。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)の解答・解説

$$\omega = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

演習 2(2) 速さは

$$|\,v\,| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

で求められる。

$$|\,v\,| = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s^{-1}}\sqrt{(2\,\mathrm{m})^2 - (1\,\mathrm{m})^2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

左向きに通過するときの速度は

$$v = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

であり、右向きに通過するときは

$$v = +\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$$

である。

演習 2(3) 加速度は

$$a = -\omega^2 x$$

より、

$$a = -\frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

2 つの場面はどちらも $x = +1\,\mathrm{m}$ なので、加速度はともに左向きで等しい。

演習 2(4) 同じ位置でも、右端から左端へ向かっている途中と、左端から右端へ戻っている途中がある。

この 2 つでは進行方向が反対なので、速度の符号は異なる。

位置だけでは現在どちら向きに動いているか分からないため、速度の符号は決まらない。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)の解答・解説

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

$t = 0$ の位相は $\phi = \frac{\pi}{2}$ なので、

$$x = 0\,\mathrm{m}$$

$$v = -\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$a = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

演習 3(2) $t = 1\,\mathrm{s}$ では位相が

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

となる。

よって、

$$x = -2\,\mathrm{m}$$

$$v = 0\,\mathrm{m/s}$$

$$a = +\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

演習 3(3) $\phi = 0$ の場合、$t = 0$ で右端 $x = +2\,\mathrm{m}$ にいて、速度は 0 である。直後には左向きに動く。

$\phi = \frac{\pi}{2}$ の場合、$t = 0$ で中心 $x = 0$ にいて、速度は $-\pi\,\mathrm{m/s}$ である。

つまり、初期位相の変更によって、同じ時刻の位置と速度が変わる。

演習 3(4) 振幅と周期は変わらない。

初期位相 ϕ は時刻 0 での位相を決める値であり、振幅 A や角振動数 $\omega = 2\frac{\pi}{T}$ を変更しないからである。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 基準の運動では、

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

速度の最大の大きさは

$$|\,v\,|_{\max} = A\omega = \pi\,\mathrm{m/s}$$

加速度の最大の大きさは

$$|\,a\,|_{\max} = A\omega^2 = \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

演習 4(2) 条件 Ⅰ では周期が変わらないので、振動数も

$$f = 0.25\,\mathrm{Hz}$$

のままである。

振幅は 2 倍なので、

$$|\,v\,|_{\max} = 2\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$|\,a\,|_{\max} = \pi^2\,\mathrm{m/s^2}$$

となり、どちらも 2 倍となる。

演習 4(3) 条件 Ⅱ では周期が 2 倍なので、角振動数は

$$\omega = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s}$$

となり、半分になる。

速度の最大の大きさは

$$|\,v\,|_{\max} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{m/s}$$

で基準の半分、加速度の最大の大きさは

$$|\,a\,|_{\max} = \frac{\pi^2}{8}\,\mathrm{m/s^2}$$

で基準の 4 分の 1 となる。

演習 4(4) 端から端までの距離は $2A$ である。

基準では 4 m、条件 Ⅰ では 8 m、条件 Ⅱ では 4 m である。

したがって、端から端までの距離が大きくなるのは条件 Ⅰ だけである。条件 Ⅱ は周期を変えただけなので、振動の範囲は変わらない。

©ミライコーチング

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 速度が 0 になるのは両端に到達するときである。

したがって、

$$t = 0\,\mathrm{s},\quad 2\,\mathrm{s},\quad 4\,\mathrm{s}$$

である。

演習 5(2) 加速度が 0 になるのは中心 $x = 0$ を通過するときである。

したがって、

$$t = 1\,\mathrm{s},\quad 3\,\mathrm{s}$$

である。

演習 5(3) どちらも中心を通過するため、変位は $0\,\mathrm{m}$、加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$ で共通する。

一方、速度は

$$v(1\,\mathrm{s}) = -\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$v(3\,\mathrm{s}) = +\pi\,\mathrm{m/s}$$

であり、向きが反対である。

演習 5(4) 変位・速度・加速度は異なる物理量であり、単位も異なる。

また、3 つのグラフの縦軸は目盛の尺度が異なるため、図の見かけの高さを直接比較して物理量の大小を決めることはできない。

同じ時刻で符号や零点、極値を対応させ、それぞれの軸の単位と数値を読まなければならない。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1)の解答・解説

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$$

である。

変位は

$$\begin{aligned} x &= A\cos\frac{\pi}{3} \\ &= (3\,\mathrm{m}) \times \frac{1}{2} \\ &= 1.5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

演習 6(2) 角振動数は

$$\omega = \frac{2\pi}{6\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/s}$$

である。

速度は

$$\begin{aligned} v &= -A\omega \sin \frac{\pi}{3} \\ &= -(3\,\mathrm{m})\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{s}^{-1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、左向きで、大きさは $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m/s}$ である。

演習 6(3) 加速度は

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ &= -\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 (1.5\,\mathrm{m}) \\ &= -\frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{m/s}^2 \end{aligned}$$

となる。

したがって、左向きで、大きさは $\frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{m/s}^2$ である。

演習 6(4) 点 P は円周上を動く補助点であり、点 H はその横方向への投影位置を表す点である。

P の運動方向は円の接線方向であるが、H は横一直線上を往復する。

したがって、同じ実物が円運動と直線運動を同時に行っていると考えるのではなく、円運動の横方向の成分を単振動のモデルとして利用していると捉えるべきである。

演習 7 の解答・解説

演習 7(1) $t = 0\,\mathrm{s}$ に右端にいて、$t = 2\,\mathrm{s}$ に左端へ到達し、$t = 4\,\mathrm{s}$ に右端へ戻る。

よって、1 往復の時間は

$$T = 4\,\mathrm{s}$$

である。

振動数は

$$f = \frac{1}{4\,\mathrm{s}} = 0.25\,\mathrm{Hz}$$

となる。

演習 7(2) $t = 1\,\mathrm{s}$ は右端から出発して $\frac{T}{4}$ が経過した時刻である。

したがって、物体は中心 $x = 0$ にいて、左向きに動いている。

演習 7(3) $t = 2\,\mathrm{s}$ は左端で折り返す時刻である。

この瞬間の速度は 0 だが、物体は右向きへ動き始める必要があり、中心向きの正の加速度を持つ。

単振動では

$$a = -\omega^2 x$$

であり、左端 $x = -A$ において

$$a = +A\omega^2$$

となるので、加速度は 0 ではない。

演習 7(4) 2 s をそのまま周期としてはいけない。

右端から左端までの移動は半往復であり、元の右端に戻るにはさらに同じだけの時間が必要である。

速度が 0 になる連続した折返しの時刻の間隔は $\frac{T}{2}$ にあたるため、この運動の周期は 4 s である。

©ミライコーチング