

第 68 講 確率の乗法定理と期待値

学習目標

- ・ 条件付き確率から確率の乗法定理を導ける。
- ・ 「 A が起こり、さらに B が起こる」確率を条件付き確率を用いて求められる。
- ・ 離散的な値をとる確率変数の期待値を「値×確率の総和」として求められる。
- ・ 確率の乗法定理と期待値の目的の違いを判断できる。

条件付き確率から乗法定理へ

A が起こったあとで B が起こる

事象 A と事象 B を考える。

まず A が起こる確率を $P(A)$ とする。

さらに、 A が起こったと分かっているもとで B が起こる条件付き確率を、

$$P(B \mid A)$$

とする。

このとき、

1. まず A が起こる。
2. A が起こったという条件のもとで B が起こる。

という順に考えることで、 A と B がともに起こる確率を求められる。

条件付き確率の向き

$P(B \mid A)$ は、

A が起こったと分かっているもとで、 B が起こる確率を表す。

縦線の右側にある A が条件であり、左側の B がその条件のもとで調べる事象である。

確率の乗法定理

条件付き確率の式を変形する

$P(A) > 0$ とする。

条件付き確率の定義は、

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ と } B)}{P(A)}$$

である。

両辺に $P(A)$ を掛けると、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B \mid A)$$

となる。

これが確率の乗法定理である。

確率の乗法定理

$P(A) > 0$ のとき、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B | A)$$

が成り立つ。

ここで $P(A \text{ と } B)$ は、事象 A と事象 B がともに起こる確率を表す。

乗法定理の意味

確率の乗法定理は、

1. 最初の事象 A が起こる確率を求める。
 2. A が起こったという条件のもとで B が起こる確率を求める。
 3. 2つの確率を掛ける。
- という考え方である。

カードを戻さず取る場合**2 回目の確率が変化する**

赤いカード 3 枚と青いカード 2 枚がある。

5 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。

事象 A を「1 枚目が赤」、事象 B を「2 枚目も赤」とする。

1 枚目が赤である確率は、

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

である。

1 枚目が赤であったと分かると、残りは赤 2 枚、青 2 枚となる。

したがって、

$$P(B | A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

よって、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

となる。

同じ確率をそのまま掛けない

カードを戻さない場合、1 回目に何を取ったかによって残りの内訳が変わる。

したがって、

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

のように、1 回目と同じ確率をそのまま 2 回使うことはできない。

2 回目の確率は、1 回目の結果を条件として求める必要がある。

独立な場合との関係

独立なら条件を知っても確率が変わらない

事象 A と事象 B が独立である場合、 A が起こったと分かっていても B の確率は変わらない。
したがって、

$$P(B \mid A) = P(B)$$

である。

このとき乗法定理は、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B)$$

となる。

これは独立な事象について学んだ積の法則と一致する。

独立な場合は特別な形になる

確率の乗法定理の基本形は、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B \mid A)$$

である。

A と B が独立なら $P(B \mid A) = P(B)$ なので、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B)$$

となる。

独立かどうかを確認する

単純に $P(A)P(B)$ とできるのは、事象 A と B が独立である場合である。

独立でない場合には、条件付き確率 $P(B \mid A)$ を用いる。

確率の乗法定理を使う手順

基本手順

1. とともに起こる 2 つの事象を確認する。
2. 最初に考える事象を A とする。
3. $P(A)$ を求める。
4. A が起こった条件のもとで $P(B \mid A)$ を求める。
5. $P(A)P(B \mid A)$ を計算する。
6. 答えが 0 以上 1 以下であることを確認する。

期待値とは何か

値を確率で重みづけして平均する

ここからは、確率の乗法定理とは別の考え方として期待値を扱う。

ある試行の結果によって数値 X が決まるとする。

たとえば、 X が次のような値をとるとする。

X の値	確率
0	$\frac{1}{2}$

X の値	確率
2	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{6}$

このとき、単純に 0, 2, 5 の平均を求めるのではない。
 それぞれの値が起こる確率が異なるためである。
 そこで、各値にその値をとる確率を掛け、そのすべてを足す。
 これが期待値の考え方である。

期待値

確率変数 X が値 $x_1, x_2, x_3, \dots$ を、それぞれ確率 $p_1, p_2, p_3, \dots$ でとるとき、 X の期待値を、

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots$$

と定める。

つまり期待値は、

値×その値をとる確率の総和
 である。

期待値は重みつき平均

期待値では、起こりやすい値ほど大きな重みをつけ、起こりにくい値ほど小さな重みをつけて平均する。
 そのため、単純な平均ではなく、確率を重みとした平均である。

期待値の基本計算

値×確率を足す

確率変数 X が次の値をとるとする。

X の値	確率
0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{6}$

まず、確率の合計は、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

である。

期待値は、

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6}$$

である。

したがって、

$$E(X) = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$$

となる。

期待値は実際に起こる値とは限らない

先ほどの例で X が実際にとる値は $0, 2, 5$ である。
しかし、期待値は $\frac{3}{2}$ である。
期待値そのものが 1 回の試行で実際に現れる必要はない。
期待値は、多数回の試行を考えたときの平均的な値を表す量である。

公正なさいころの期待値

すべて同じ確率で起こる場合

公正な 6 面さいころを 1 回投げ、出た目を X とする。
各目が出る確率はすべて $\frac{1}{6}$ である。
したがって、

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

となる。
よって、

$$E(X) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

である。
さいころの目に $\frac{7}{2}$ は存在しないが、期待値としては問題ない。

期待値を求める手順

基本手順

1. 起こりうる値をすべて確認する。
2. 各値をとる確率を求める。
3. 確率の合計が 1 になることを確認する。
4. 各値について「値×確率」を計算する。
5. すべてを足して期待値を求める。

乗法定理と期待値の使い分け

求めるものが異なる

確率の乗法定理と期待値は、どちらも確率を用いるが目的は異なる。

内容	求めるもの	基本の考え方
確率の乗法定理	複数の事象がともに起こる確率	最初の確率と条件付き確率を掛ける
期待値	結果として得られる数値の平均的な値	値×確率をすべて足す

問題文が「ある事象が起こる確率」を求めているなら乗法定理を考える。
問題文が「得点や個数などの平均的な値」を求めているなら期待値を考える。

2つの公式を混同しない

確率の乗法定理は、事象がともに起こる確率を求めるためのものである。
期待値は、確率によって変化する数値の平均的な値を求めるためのものである。
同じ問題で無理に両者を結びつける必要はない。

例題

例題 1

赤いカード 4 枚と青いカード 2 枚がある。
6 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。
2 枚とも赤である確率を、確率の乗法定理を用いて求めよ。

例題 1 の解答・解説

事象 A を「1 枚目が赤」、事象 B を「2 枚目も赤」とする。
1 枚目が赤である確率は、

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

である。
1 枚目が赤だった場合、残り 5 枚のうち赤は 3 枚である。
したがって、

$$P(B \mid A) = \frac{3}{5}$$

である。
確率の乗法定理より、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

となる。
よって、2 枚とも赤である確率は $\frac{2}{5}$ である。

例題 2

白いカード 3 枚と黒いカード 2 枚がある。
5 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。
1 枚目が白、2 枚目が黒となる確率を求めよ。

例題 2 の解答・解説

事象 A を「1 枚目が白」、事象 B を「2 枚目が黒」とする。
1 枚目が白である確率は、

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

である。
1 枚目が白だった場合、残りは白 2 枚、黒 2 枚である。
したがって、

$$P(B \mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。
よって、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

となる。

例題 3

確率変数 X が次の値をとる。

X の値	確率
0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{4}$

$E(X)$ を求めよ。

例題 3 の解答・解説

確率の合計は、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

である。
期待値は、

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{4}$$

である。
したがって、

$$E(X) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

である。

演習問題

練習問題 1

赤いカード 3 枚と青いカード 3 枚がある。
6 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。
2 枚とも青である確率を求めよ。

練習問題 2

白いカード 4 枚と黒いカード 1 枚がある。
5 枚から 1 枚を取り、戻さずにもう 1 枚取る。
1 枚目が白、2 枚目が黒となる確率を求めよ。

練習問題 3

ある試行について、

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

かつ、

$$P(B \mid A) = \frac{3}{4}$$

である。

A と B がともに起こる確率を求めよ。

練習問題 4

ある試行について、

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

かつ、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{1}{7}$$

である。

$P(B \mid A)$ を求めよ。

練習問題 5

公正なコインを 1 回投げ、公正な 6 面さいころを 1 回投げる。
事象 A を「コインが表」、事象 B を「さいころが偶数」とする。
 $P(A \text{ と } B)$ を求めよ。また、この場合に $P(B \mid A) = P(B)$ となる理由を説明せよ。

練習問題 6

確率変数 X が次の値をとる。

X の値	確率
1	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{4}$

$E(X)$ を求めよ。

練習問題 7

確率変数 Y が次の値をとる。

Y の値	確率
0	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{2}{5}$
10	$\frac{1}{5}$

$E(Y)$ を求めよ。

練習問題 8

1, 3, 5, 7 と書かれた 4 枚のカードから 1 枚を無作為に選ぶ。
選んだカードの数を X とするとき、 $E(X)$ を求めよ。

練習問題 9

次の問いについて、それぞれ確率の乗法定理と期待値のどちらを使う問題であるか答え、理由を説明せよ。

- (1) 赤いカードと青いカードが入った箱から戻さずに 2 枚取り、2 枚とも赤である確率を求める。
- (2) ある試行で得られる得点が 0, 2, 5 のいずれかであるとき、その平均的な得点を求める。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

事象 A を「1 枚目が青」、事象 B を「2 枚目も青」とする。
1 枚目が青である確率は、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

1 枚目が青だった場合、残り 5 枚のうち青は 2 枚なので、

$$P(B \mid A) = \frac{2}{5}$$

である。

したがって、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

1 枚目が白である確率は、

$$\frac{4}{5}$$

である。

1 枚目が白だった場合、残り 4 枚のうち黒は 1 枚なので、2 枚目が黒である確率は、

$$\frac{1}{4}$$

である。

したがって、

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

である。

練習問題 3 の解答・解説

確率の乗法定理より、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B \mid A)$$

である。

したがって、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

である。

練習問題 4 の解答・解説

確率の乗法定理より、

$$P(A \text{ と } B) = P(A)P(B \mid A)$$

である。

したがって、

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ と } B)}{P(A)}$$

である。

よって、

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

である。

練習問題 5 の解答・解説

コインが表である確率は、

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

である。

さいころが偶数である確率は、

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

コインの結果は、さいころの各目の出やすさに影響しない。

したがって、 A と B は独立であり、

$$P(B \mid A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

である。

よって、

$$P(A \text{ と } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

確率の合計は、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

である。

期待値は、

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}$$

である。

したがって、

$$E(X) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

である。

練習問題 7 の解答・解説

確率の合計は、

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

である。

期待値は、

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{1}{5}$$

である。

したがって、

$$E(Y) = \frac{8}{5} + \frac{10}{5} = \frac{18}{5}$$

である。

練習問題 8 の解答・解説

4 枚のカードは同様に選ばれやすいので、それぞれの確率は $\frac{1}{4}$ である。

したがって、

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4}$$

である。

よって、

$$E(X) = \frac{16}{4} = 4$$

である。

練習問題 9 の解答・解説

(1) は確率の乗法定理を使う問題である。

求めるものが、1 枚目と 2 枚目の両方が条件を満たす確率だからである。

(2) は期待値を使う問題である。

求めるものが特定の事象の確率ではなく、確率によって変わる得点の平均的な値だからである。