第 092 講 コンデンサーのエネルギーと状態

この講でできるようになること

- コンデンサーに蓄えられるエネルギーを、電荷・電圧・静電容量から計算できる。
- 電池につないだ状態と両端を切り離した状態を区別し、一定に保たれる量を判断できる。
- 極板間隔や誘電体を変えたときの電荷・電圧・エネルギーを比較できる。
- 電池の仕事・外力の仕事・蓄積エネルギーの変化を、符号とエネルギーの流れから説明できる。
- ゆっくり電圧を変える充電と、一定電圧の電池から抵抗を通して充電する場合のエネルギー収支を区別できる。

1. コンデンサーには何が蓄えられるのか

電荷を分けて蓄える装置

スマートフォンの電子回路などには、電気エネルギーを一時的に蓄えるコンデンサーが使われている。

コンデンサーは、電荷を分けて蓄えることで、電極の間に電場をつくる装置である。では、電荷を蓄えたコンデンサーのエネルギーは、何によって決まるのだろうか。

まず、向かい合う 2 枚の金属板からなる**平行板コンデンサー**を考える。

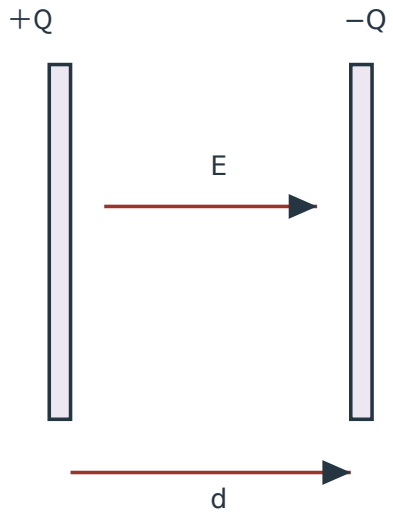

図 1　平行板コンデンサーの断面模式図。左が正の極板で高電位、右が負の極板で低電位。

左の極板には正の自由電荷 $+Q$、右の極板には負の自由電荷 $-Q$ が蓄えられている。自由電荷とは、導体内を移動できる電荷である。

ここで $Q>0$ は、**片方の極板に蓄えられた自由電荷の大きさ**を表す。両極板の電荷を足すと $+Q+(-Q)=0$ になるが、これはエネルギーが 0 であることを意味しない。

電荷が正負に分かれたことで電場がつくられ、その電場にエネルギーが蓄えられている。

図の E は正の極板から負の極板へ向かう電場を表す矢印である。d は極板間隔を表し、力の矢印ではない。各極板の向かい合う面積を S とする。

本講では、極板の端付近に生じる電場の乱れを無視できる理想的な平行板コンデンサーを扱う。図の形や矢印の長さは模式的なものであり、数値の測定には使わない。

電荷・電圧・静電容量

コンデンサーの基本的な関係は、次の式である。

$$Q = CV$$

C は静電容量、V は正の極板の電位から負の極板の電位を引いた電圧である。本講では $C > 0$、充電された状態では $Q > 0$、$V > 0$ とする。

物理量	量記号	単位	単位記号
電荷の大きさ	Q	クーロン	C
電圧	V	ボルト	V
静電容量	C	ファラド	F
エネルギー	U	ジュール	J

静電容量の量記号 C と、電荷の単位であるクーロンの記号 C は同じ文字でも意味が異なる。また、電圧の量記号 V と単位記号 V も区別する。

小さいコンデンサーでは、次の単位をよく使う。

$$1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

$$1\,\mu\mathrm{C} = 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

$$1\,\mu\mathrm{J} = 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

ここで μ は「マイクロ」を意味する。

電荷と電圧を掛けるとエネルギーの単位になる。

$$1\,\mathrm{C} \times 1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J}$$

この対応は、後でエネルギーを計算するときにも利用できる。

2. 電池につながっているかで一定量が変わる

電源との接続状態を先に調べる

コンデンサーの極板間隔や内部の物質を変えると、静電容量 C が変化することがある。

そのとき、電荷 Q と電圧 V のどちらが一定なのかは、**電池との接続状態**によって決まる。

電池につないだままの場合

電池は、両端の電位差を保つ電源である。ここでは、端子間の電圧が常に V_0 である理想電池を考える。

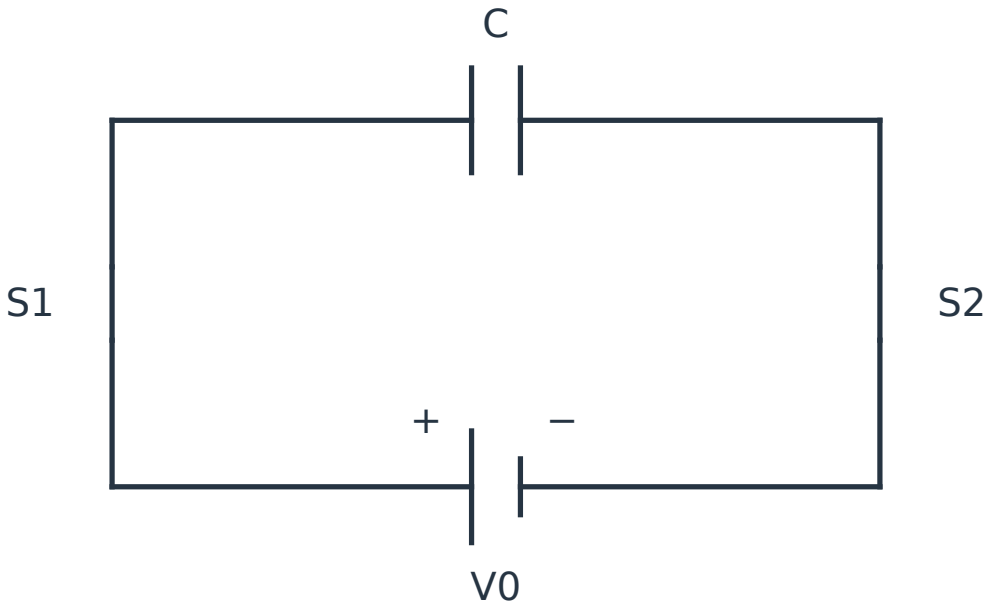

図 2　理想電池にコンデンサーの両端を接続した状態。S1 と S2 は閉じている。

回路図の平行な 2 本の線はコンデンサー、長さの異なる線の組は電池を表す。電池の長い線側が正極であり、図では左側の極板が電池の正極につながる。

S1 と S2 はスイッチである。「閉じている」とは導線がつながり、電荷が移動できる状態を意味する。

電池との接続を保ち、各状態が静電平衡に達しているなら、コンデンサーの電圧は電池電圧に等しい。

$$V = V_0 \quad (\text{一定})$$

したがって、静電容量が変われば、関係式 $Q = CV_0$ に従って電荷が変化する。

電荷が増えるときは電池からコンデンサーへ電荷が移り、減るときは逆向きに戻ることができる。**電池につながっているからといって、電荷が一定とは限らない。**

充電後に両端を切り離した場合

次に、電池で充電した後、コンデンサーの両端をともに電池から切り離す。

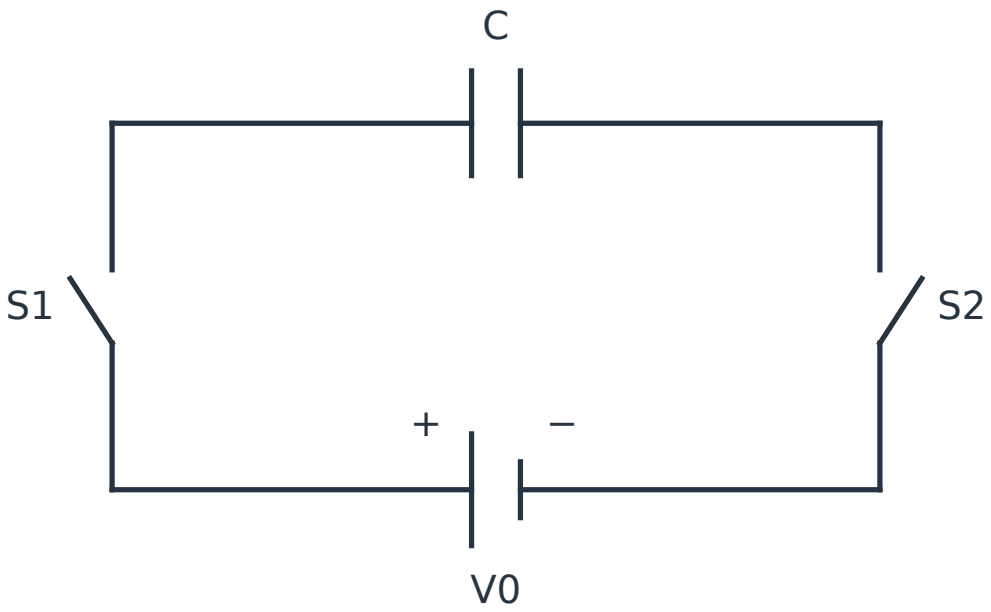

図 3　充電後に両端を電池から切り離した状態。S1 と S2 は開いている。

スイッチが開くと、導線の途中に隙間が生じ、電池との接続が切れる。

両極板が十分に絶縁され、電荷が外へ漏れない理想状態では、各極板にある自由電荷が保存される。

$$Q = Q_0 \quad (\text{一定})$$

このとき、静電容量 C が変化すれば、電圧は

$$V = \frac{Q_0}{C}$$

に従って変化する。

つまり、電池を切り離すと電荷は一定でも、電圧まで一定になるわけではない。

先に接続状態を判定する

接続状態	一定に保たれる量	C が変わったとき
理想電池につないだまま	電圧 V	電荷 Q が変わる
両端を切り離し、漏れなし	電荷 Q	電圧 V が変わる

計算では、最初に接続状態を確認し、次に一定量を決める。その後で $Q = CV$ を用いる。

---

3. コンデンサーのエネルギー

電荷を少しずつ蓄えるときの仕事

コンデンサーに蓄えられた電気エネルギーを U と表す。

エネルギーの基準は、**同じ構造・同じ媒質のコンデンサーに電荷が蓄えられていない状態を $U = 0$ とする**。

静電容量が一定のコンデンサーに、電荷を 0 から少しずつ蓄えていく場合を考える。

電荷が少ないとき、コンデンサーの電圧は低い。充電が進むほど電圧が高くなるため、さらに電荷を移すために必要なエネルギーも大きくなる。

途中の電荷を q と表すと、そのときの電圧は

$$V = \frac{q}{C}$$

である。

ここで、電源の電圧をコンデンサーの電圧に合わせて少しずつ変え、エネルギーの損失を無視できる可逆的な充電を考える。

このような充電では、移した電荷とそのときの電圧の積を少しずつ足し合わせたものが、蓄積エネルギーになる。

電圧–電荷グラフの三角形

静電容量が $C = 2.0\,\mu\mathrm{F}$ のコンデンサーを、電荷 0 から $12\,\mu\mathrm{C}$ まで充電する。

終点の電圧は

$$V = \frac{12\,\mu\mathrm{C}}{2.0\,\mu\mathrm{F}} = 6.0\,\mathrm{V}$$

である。

途中では電荷 q と電圧 V が比例するため、グラフは原点を通る直線になる。

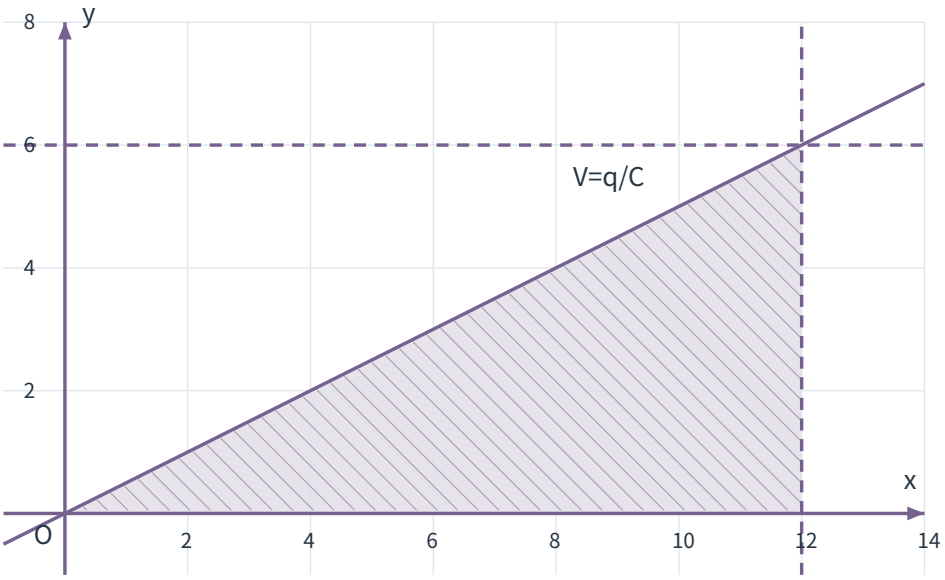

図 4　電荷を少しずつ増やすときの電圧–電荷グラフ。斜線部が蓄積エネルギーを表す。

横軸の数値 x は電荷 q を $\mu\mathrm{C}$ で表した値、縦軸の数値 y は電圧 V を V で表した値である。したがって、この例の直線は数値として $y = \frac{x}{2}$ となる。

斜線部分は、底辺 $12\,\mu\mathrm{C}$、高さ $6.0\,\mathrm{V}$ の三角形である。

三角形の面積から、蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\mathrm{C} \times 6.0\,\mathrm{V} \\ &= 36\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

横軸は時間ではなく電荷である。このグラフは、電流の時間変化を示すものではない。

エネルギーを表す 3 つの式

同じ静電状態について $Q = CV$ が成り立つので、蓄積エネルギーは次の 3 通りで表せる。

コンデンサーの蓄積エネルギー

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

- U：蓄積エネルギー（J）
- Q：片極板の自由電荷の大きさ（C）
- V：コンデンサーの電圧（V）
- C：静電容量（F）

3 つの式は異なる種類のエネルギーではなく、**同じ状態の同じエネルギー**を表している。

例えば、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned}$$

となる。

一方、$V = \frac{Q}{C}$ を代入すると

$$U = \frac{1}{2}Q\frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

である。

どの式を使うかは、何が既知で何が一定なのかによって選ぶ。

同じ静電容量なら U は V^2 に比例し、同じ電荷なら U は $\frac{1}{C}$ に比例する。ただし、これらの関係を異なる接続状態へ無条件に当てはめてはいけない。

例題 1

静電容量が 2.0 μF のコンデンサーを、電圧 6.0 V まで充電した。充電後は静電平衡に達しているものとする。

例題 1(1) 片極板に蓄えられた自由電荷の大きさ Q と、蓄積エネルギー U を求めよ。また、エネルギーが 0 でない理由を説明せよ。

例題 1(2) 静電容量を変えずに、電圧だけを 12 V とした別の静電状態を考える。この状態の Q と U を求め、最初の状態と比較せよ。

例題 1(1)の解答・解説

$Q = CV$ より、

$$\begin{aligned} Q &= 2.0\,\mu\mathrm{F} \times 6.0\,\mathrm{V} \\ &= 12\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

となる。

エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\mathrm{C} \times 6.0\,\mathrm{V} \\ &= 36\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

$U = \frac{1}{2}CV^2$ または $U = \frac{Q^2}{2C}$ に代入しても、同じ 36 μJ が得られる。

両極板の電荷の合計は 0 であっても、正負の電荷が分かれて電場がつくられているため、エネルギーは 0 ではない。

例題 1(2)の解答・解説

静電容量は $2.0\,\mu\mathrm{F}$ のままである。

$$\begin{aligned} Q &= 2.0\,\mu\mathrm{F} \times 12\,\mathrm{V} \\ &= 24\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2.0\,\mu\mathrm{F} \times (12\,\mathrm{V})^2 \\ &= 144\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

電圧が 2 倍になると、電荷は 2 倍、エネルギーは 4 倍になった。これは C を固定した比較だからである。

ただし、初めと終わりの U が分かっただけでは、その間に電池がした仕事や発生した熱は決定できない。仕事を考えるには、途中でどのように充電したのかという条件も必要になる。

4. コンデンサーの構造を変えるとどうなるか

極板間隔と静電容量

真空中の平行板コンデンサーについて、端の電場の乱れを無視する。

静電容量 C は、極板の対向面積 S に比例し、極板間隔 d に反比例する。

$$C \propto \frac{S}{d}$$

ここで $\propto$ は比例を表す。

対向面積 S を固定し、間隔を d から $2d$ に広げると、

$$C_{\text{後}} = \frac{1}{2}C_{\text{前}}$$

となる。

しかし、エネルギーが半分になるかどうかは、接続状態を確認しなければ判断できない。

電池につないだままなら V 一定であり、

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

を用いる。

一方、両端を切り離して電荷が漏れなければ Q 一定であり、

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

を用いる。

同じように静電容量を半分にしても、前者ではエネルギーが減り、後者では増える。

誘電体を入れた場合

誘電体とは、電場の中で電気的な状態が変化する絶縁性の物質である。

同じ対向面積・極板間隔の真空コンデンサーの内部に、均質な誘電体を隙間なく完全に入れる場合を考える。

誘電体の比誘電率を κ とすると、ここでは

$$C_{\text{後}} = \kappa C_{\text{前}}$$

が成り立つものとする。

例えば $\kappa = 3$ なら、静電容量は 3 倍になる。

誘電体を途中まで入れた場合や端の電場の影響が大きい場合には、そのまま 3 倍という関係を使えるとは限らない。本講では完全挿入と端効果無視を条件とする。

5. エネルギーの変化と仕事の関係

コンデンサーだけのエネルギーが保存されるとは限らない

極板を動かすときには外から力を加える場合がある。また、電池につないでいれば、電池との間でエネルギーが出入りする。

そこで、系を**コンデンサーの極板・内部の電場・誘電体からなる装置**とし、その静電的な蓄積エネルギーを U とする。電池と、極板や誘電体を動かす外部装置は系の外に置く。

初めと終わりの状態は静電平衡であるとし、構造変更は十分ゆっくり行う。摩擦・放射などによる損失はなく、始終状態に運動エネルギーが残らない理想的な過程を考える。

この条件では、エネルギーの収支は

構造変更におけるエネルギー収支

$$\Delta U = W_{\text{電池}} + W_{\text{外}}$$

- $\Delta U = U_{\text{後}} - U_{\text{前}}$：蓄積エネルギーの変化
- $W_{\text{電池}}$：電池がコンデンサー系へ供給した仕事
- $W_{\text{外}}$：外部装置がコンデンサー系へした仕事

電池または外部装置から**コンデンサー系へエネルギーが入る仕事を正**とする。

仕事が負になるのは、エネルギーがコンデンサー系から外部へ出ていくことを意味する。

特に、一定電圧 V_0 の理想電池がつながっているとき、

$$W_{\text{電池}} = V_0 \Delta Q$$

である。ただし、$\Delta Q = Q_{\text{後}} - Q_{\text{前}}$ は片極板の自由電荷の大きさの変化である。

$\Delta Q > 0$ なら電池がエネルギーを供給し、$\Delta Q < 0$ ならコンデンサーから電池へエネルギーが戻る。

両端を切り離した場合は電池とのエネルギーの出入りがないため、

$$W_{\text{電池}} = 0$$

となる。

したがって、損失のない構造変更なら

$$\Delta U = W_{\text{外}}$$

である。

切り離したコンデンサーでも、外力が仕事をすればエネルギーは変化する。

仕事を二重に数えない

コンデンサーの内部に働く電気力の効果は、蓄積エネルギー U の変化に含めている。

そのため、$\Delta U = W_{\text{電池}} + W_{\text{外}}$ を用いるとき、内部の電気力がした仕事をさらに右辺へ足してはいけない。

$W_{\text{外}}$ は、外部装置からコンデンサー系への仕事を表す。内部の電気力の仕事とは区別する。

例題 2

真空中の平行板コンデンサーを考える。初めの静電容量は $2.0\,\mu\text{F}$、電圧は $6.0\,\text{V}$ である。極板の対向面積 S を変えず、間隔を d から $2d$ へ十分ゆっくり広げる。

端効果、摩擦、放射による損失を無視する。初めと終わりは静電平衡であり、外力の仕事はコンデンサー系にエネルギーを与える向きを正とする。

次の模式図は、極板間隔を変更した後の配置を示す。図中の E は電場の向きであり、力の大きさを示さない。

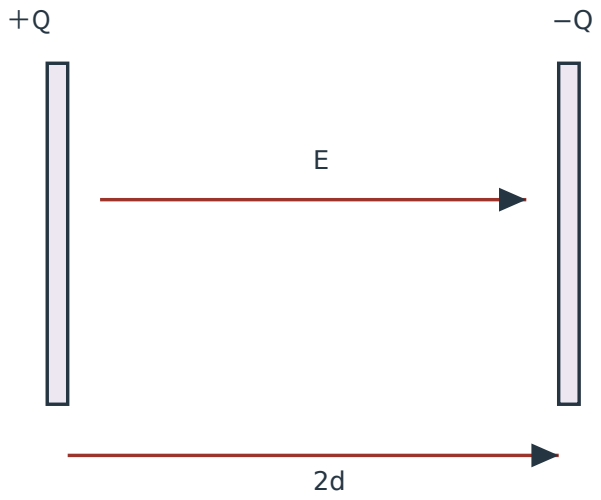

図 5　対向面積を固定し、極板間隔を 2d に広げた状態の模式図。

例題 2(1) 充電後に両端を電池から切り離し、電荷が漏れない状態で間隔を広げた。変更後の C, Q, V, U と、外力の仕事を求めよ。

例題 2(2) 初めから終わりまで理想 $6.0\,\text{V}$ 電池との接続を保った。変更後の C, Q, V, U と、電池の仕事および外力の仕事を求めよ。

例題 2(1)の解答・解説

まず、初めの電荷とエネルギーは

$$\begin{aligned} Q_{\text{前}} &= 2.0\,\mu\text{F} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 12\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\text{前}} &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 36\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

である。

間隔が 2 倍になるので、静電容量は半分になる。

$$C_{\text{後}} = \frac{2.0\,\mu\text{F}}{2} = 1.0\,\mu\text{F}$$

両端を切り離して電荷が漏れないため、Q は一定である。

$$Q_{\text{後}} = 12\,\mu\text{C}$$

したがって、電圧は

$$\begin{aligned} V_{\text{後}} &= \frac{12\,\mu\text{C}}{1.0\,\mu\text{F}} \\ &= 12\,\text{V} \end{aligned}$$

エネルギーは

$$\begin{aligned} U_{\text{後}} &= \frac{1}{2} Q_{\text{後}} V_{\text{後}} \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 12\,\text{V} \\ &= 72\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

となる。

電池から切り離しているため $W_{\text{電池}} = 0$ である。

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \Delta U \\ &= 72\,\mu\text{J} - 36\,\mu\text{J} \\ &= +36\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

極板どうしの引力に逆らって間隔を広げるため、外部から正の仕事をする必要がある。そのエネルギーがコンデンサーに蓄えられたのである。

例題 2(2)の解答・解説

間隔変更後の静電容量は、例題 2(1)と同じく

$$C_{\text{後}} = 1.0\,\mu\text{F}$$

である。

ただし、今回は電池との接続を保っているため、一定なのは電圧である。

$$V_{後} = 6.0\,\mathrm{V}$$

したがって、

$$\begin{aligned} Q_{後} &= 1.0\,\mu\mathrm{F} \times 6.0\,\mathrm{V} \\ &= 6.0\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{後} &= \frac{1}{2} \times 6.0\,\mu\mathrm{C} \times 6.0\,\mathrm{V} \\ &= 18\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

電荷が減少したため、電池の仕事は負になる。

$$\begin{aligned} W_{電池} &= V_0(Q_{後} - Q_{前}) \\ &= 6.0\,\mathrm{V} \times (6.0 - 12)\,\mu\mathrm{C} \\ &= -36\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

一方、蓄積エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \Delta U &= 18\,\mu\mathrm{J} - 36\,\mu\mathrm{J} \\ &= -18\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

収支式から外力の仕事を求める。

$$\begin{aligned} W_{外} &= \Delta U - W_{電池} \\ &= -18\,\mu\mathrm{J} - (-36\,\mu\mathrm{J}) \\ &= +18\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

ここで、エネルギーの行き先を図で確かめる。

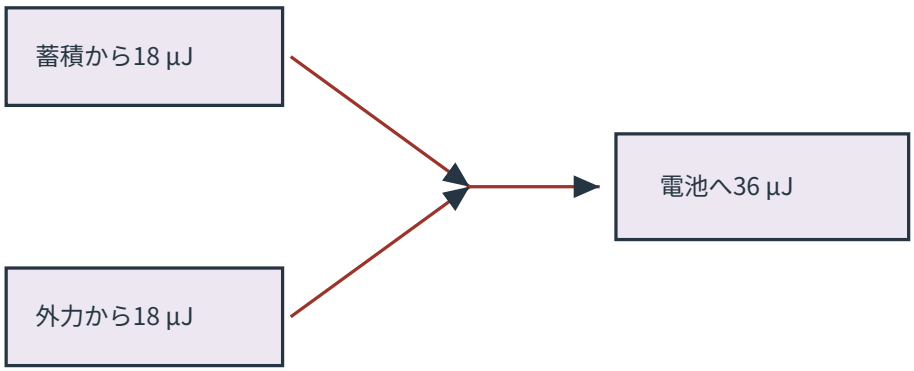

図 6　間隔 2 倍・電圧一定。蓄積の減少 18 μJ と外力の仕事 18 μJ が合わさり、36 μJ が電池へ戻る。

図の矢印は、力の向きや電流の向きではなく、エネルギーの行き先を表す。

蓄積エネルギーが 18 μJ 減少し、外力が 18 μJ を与えた結果、合わせて 36 μJ が電池へ戻る。

したがって、$W_{\text{電池}} = -36\,\mu\text{J}$ であることは、電池が 36 μJ を受け取ったことを意味する。

この場合、外力は正の仕事をしているにもかかわらず、コンデンサーのエネルギーは減少する。電池とのエネルギーの出入りも考慮する必要があるからである。

同じ構造変更でも結果は逆になる

初めの $C = 2.0\,\mu\text{F}$、$Q = 12\,\mu\text{C}$、$V = 6.0\,\text{V}$、$U = 36\,\mu\text{J}$ に対し、極板間隔を 2 倍にすると次のようになる。

量	両端切離し	電池接続
C	$1.0\,\mu\text{F}$	$1.0\,\mu\text{F}$
Q	$12\,\mu\text{C}$	$6.0\,\mu\text{C}$
V	$12\,\text{V}$	$6.0\,\text{V}$
U	$72\,\mu\text{J}$	$18\,\mu\text{J}$

静電容量の変化は同じでも、何が一定なのかによってエネルギーの変化が反対になる。

例題 3

真空中の平行板コンデンサーを考える。初めの静電容量は 2.0 μF、電圧は 6.0 V である。

極板の面積と間隔は固定したまま、比誘電率 $\kappa = 3$ の均質な誘電体を、極板間に隙間なく完全に挿入する。

端効果、摩擦、放射などの損失を無視し、挿入は十分ゆっくり行う。初めと終わりは静電平衡にあるものとする。

次の模式図は挿入後の配置を表す。$+Q$ と $-Q$ は極板の自由電荷を表し、誘電体内部に生じる電荷の数を表したものではない。

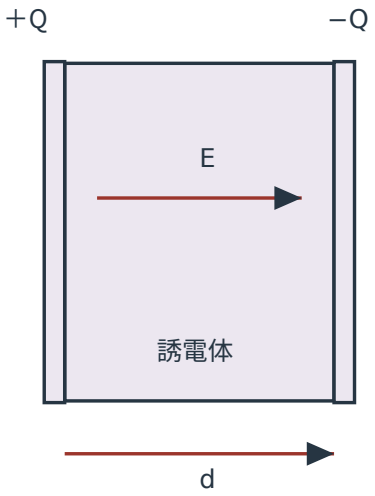

図 7　極板間に均質な誘電体を完全に挿入した状態。電場 E は正板から負板へ向かう。

例題 3(1) 充電後に両端を切り離し、電荷が漏れないようにして誘電体を挿入した。挿入後の C, Q, V, U と外力の仕事を求めよ。

例題 3(2) 理想 6.0 V 電池につないだまま誘電体を挿入した。挿入後の C, Q, V, U と、電池の仕事・外力の仕事を求め、それぞれの符号を説明せよ。

例題 3(1)の解答・解説

誘電体を完全に入れるため、静電容量は 3 倍になる。

$$\begin{aligned} C_{\text{後}} &= \kappa C_{\text{前}} \\ &= 3 \times 2.0\,\mu\text{F} \\ &= 6.0\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

両端切離しで電荷が漏れないため、電荷は一定である。

$$Q_{\text{後}} = 12\,\mu\text{C}$$

したがって、電圧は

$$\begin{aligned} V_{\text{後}} &= \frac{12\,\mu\text{C}}{6.0\,\mu\text{F}} \\ &= 2.0\,\text{V} \end{aligned}$$

となる。

エネルギーは

$$\begin{aligned} U_{\text{後}} &= \frac{1}{2} Q_{\text{後}} V_{\text{後}} \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 2.0\,\text{V} \\ &= 12\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

である。

電池とのエネルギーの出入りはないので、

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \Delta U \\ &= 12\,\mu\text{J} - 36\,\mu\text{J} \\ &= -24\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

となる。

外力の仕事が負であるのは、コンデンサー系が外部へ $24\,\mu\text{J}$ の仕事をしたためである。誘電体は電場によって内部へ引き込まれる向きの作用を受けるので、ゆっくり挿入する外部装置はエネルギーを受け取ることができる。

例題 3(2)の解答・解説

静電容量は同じく

$$C_{\text{後}} = 6.0\,\mu\text{F}$$

である。

電池につないでいるため、電圧は

$$V_{\text{後}} = 6.0\,\text{V}$$

に保たれる。

電荷とエネルギーを計算する。

$$\begin{aligned} Q_{\text{後}} &= 6.0\,\mu\text{F} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 36\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\text{後}} &= \frac{1}{2} \times 36\,\mu\text{C} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 108\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

電荷が増えているため、電池からエネルギーが供給される。

$$\begin{aligned} W_{\text{電池}} &= V_0 \Delta Q \\ &= 6.0\,\text{V} \times (36 - 12)\,\mu\text{C} \\ &= +144\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

蓄積エネルギーの増加は

$$\begin{aligned} \Delta U &= 108\,\mu\text{J} - 36\,\mu\text{J} \\ &= +72\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、外力の仕事は

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \Delta U - W_{\text{電池}} \\ &= 72\,\mu\text{J} - 144\,\mu\text{J} \\ &= -72\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

となる。

電池が供給した $144\,\mu\text{J}$ のすべてがコンデンサーのエネルギー増加になるわけではない。その一部は外部への仕事となる。

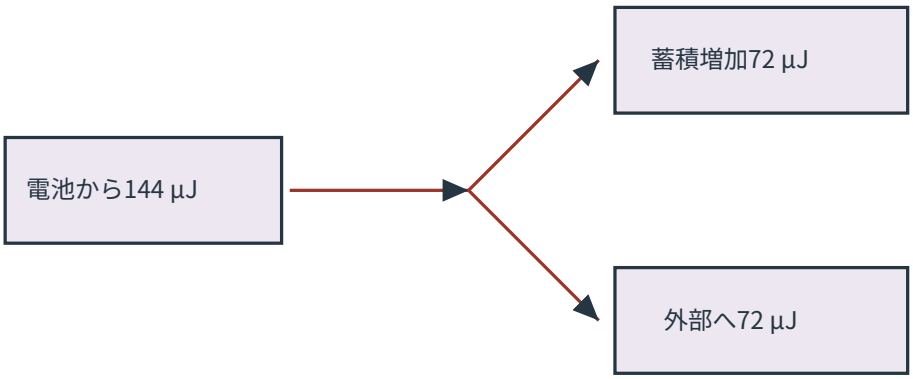

図 8　誘電体全挿入・電圧一定。電池の 144 μJ は蓄積増加 72 μJ と外部へ渡す仕事 72 μJ に分かれる。

この図の矢印も、エネルギーの行き先を表す。

電池からコンデンサー系へ入る仕事は正の $144\,\mu\mathrm{J}$ である。一方、コンデンサー系から外部へ $72\,\mu\mathrm{J}$ が渡るため、外力の仕事は負の $-72\,\mu\mathrm{J}$ となる。

これは摩擦によって失われた熱ではない。理想的な準静的挿入のもとで、外部装置が受け取った仕事である。

間隔変更と誘電体挿入を比較する

次の表では、初めの状態を共通にしている。

$$C_{\text{前}} = 2.0\,\mu\mathrm{F}$$

$$Q_{\text{前}} = 12\,\mu\mathrm{C}$$

$$V_{\text{前}} = 6.0\,\mathrm{V}$$

$$U_{\text{前}} = 36\,\mu\mathrm{J}$$

構造変更	接続条件	C	U
間隔を 2 倍	両端切離し	半分	2 倍
間隔を 2 倍	電池接続	半分	半分
誘電体を全挿入（$\kappa = 3$）	両端切離し	3 倍	3 分の 1
誘電体を全挿入（$\kappa = 3$）	電池接続	3 倍	3 倍

この表のエネルギー比は、両端切離しでは Q 一定、電池接続では V 一定という条件から得られる。

構造を変えれば U が変わることがあるため、**コンデンサー単体の蓄積エネルギーを無条件に保存量として扱わない**ことが重要である。

6. 充電のしかたとエネルギーの行き先

可変電圧でゆっくり充電する場合

静電容量 C を固定して、電源の電圧をコンデンサーの電圧に合わせながら少しずつ充電する。

充電中の電圧は $V = \frac{q}{C}$ と変化する。可逆的で損失のない理想過程なら、電源がした仕事がそのままコンデンサーの蓄積エネルギーになる。

$$W_{\text{電源}} = U = \frac{1}{2}QV$$

これは第 3 節の電圧–電荷グラフにおける三角形の面積である。

一定電圧の電池から充電する場合

次に、電圧 V_0 が一定の理想電池を、抵抗を介して空のコンデンサーへつなぎ、最終的な静電平衡まで充電する。

抵抗とは、ここでは電気エネルギーの一部を熱に変える部分である。抵抗の大きさや充電電流の時間変化を計算する必要はない。

構造が固定され、放射その他の損失が無視できるとき、電池の仕事は

$$W_{\text{電池}} = V_0 \Delta Q$$

である。

電池の仕事は、コンデンサーの蓄積エネルギーの増加と、抵抗で発生する熱 H に分かれる。

抵抗を介した充電のエネルギー収支

$$W_{\text{電池}} = \Delta U + H$$

この式は、コンデンサーの構造が固定され、外部の機械的な仕事や放射などの損失がない場合に用いる。

H は抵抗で熱に変わったエネルギーであり、正の量として扱う。

空のコンデンサーを最終電圧 V_0 まで充電すると、最終電荷は $Q = CV_0$ となる。

固定電圧の電池の仕事は

$$W_{\text{電池}} = V_0 Q$$

であり、電圧–電荷グラフでは、横幅 Q、高さ V_0 の**長方形の面積**に対応する。

一方、蓄積エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} Q V_0$$

であり、三角形の面積に対応する。

両者の差は、抵抗で発生した熱になる。

例題 4

静電容量が 2.0 μF の、初めに電荷を持たないコンデンサーを、最終電圧 6.0 V まで充電する。充電中も構造は変化しない。

例題 4(1) 電源の電圧を少しずつ変え、コンデンサーの電圧に合わせて可逆的に充電する。最終電荷と蓄積エネルギーを求め、電圧–電荷グラフの面積との関係を説明せよ。

例題 4(2) 理想 6.0 V 電池から抵抗を介して充電し、最終的に静電平衡へ達した。放射などの損失はないものとする。電池の仕事と抵抗で発生した熱を求めよ。

例題 4(1)の解答・解説

最終電荷は

$$\begin{aligned} Q &= 2.0\,\mu\text{F} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 12\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

である。

可逆的に少しずつ充電するため、電源の仕事は電圧–電荷グラフの三角形の面積に等しい。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} Q V \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 6.0\,\text{V} \\ &= 36\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

したがって、蓄積エネルギーと電源の仕事はともに 36 μJ である。

例題 4(2)の解答・解説

最終電荷は例題 4(1)と同じく $12\,\mu\mathrm{C}$ である。

しかし、今回は電池の電圧が最初から $6.0\,\mathrm{V}$ で一定である。

$$\begin{aligned} W_{\text{電池}} &= V_0 \Delta Q \\ &= 6.0\,\mathrm{V} \times 12\,\mu\mathrm{C} \\ &= 72\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

コンデンサーの蓄積エネルギーの増加は $36\,\mu\mathrm{J}$ であるため、

$$\begin{aligned} H &= W_{\text{電池}} - \Delta U \\ &= 72\,\mu\mathrm{J} - 36\,\mu\mathrm{J} \\ &= 36\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

エネルギーがどこに移ったかを図で確かめる。

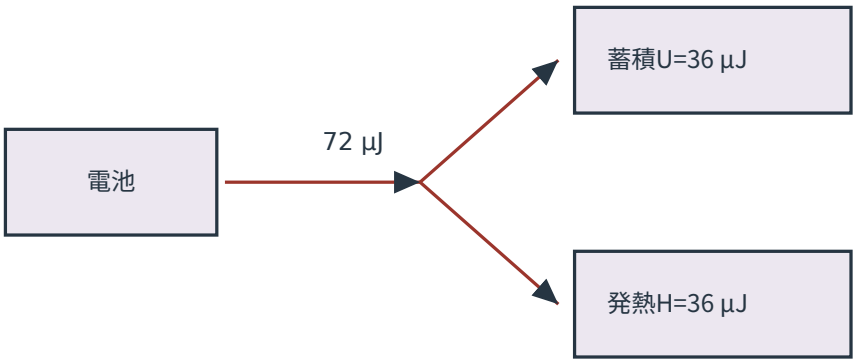

図 9　一定電圧の電池から抵抗を介して充電する場合のエネルギーの分配。

図の矢印はエネルギーの行き先であり、電流の流れる向きではない。

固定電圧の電池が供給した $72\,\mu\mathrm{J}$ は、電場に蓄えられる $36\,\mu\mathrm{J}$ と、抵抗で発生する熱 $36\,\mu\mathrm{J}$ に分かれる。

可変電圧で可逆的に充電する場合と最終状態は同じでも、電源の仕事は同じとは限らない。

最終状態が同じでも充電過程は違う

電圧–電荷グラフでは、固定容量のコンデンサーの蓄積エネルギーは三角形の面積である。

一方、一定電圧 V_0 の電池がした仕事は長方形の面積である。

空のコンデンサーを抵抗経由で充電し、他の損失を無視するなら、この面積の差が抵抗の発熱になる。

最終的な Q, V, C, U だけで、途中の電源の仕事や発熱を決めつけてはいけない。

演習問題

演習 1

静電容量 3.0 μF のコンデンサーがあり、電圧は 4.0 V である。静電平衡に達しているものとする。

演習 1(1) 片極板の自由電荷の大きさ Q を求めよ。

演習 1(2) 蓄積エネルギー U を求めよ。また、両極板の電荷の合計が 0 でもエネルギーが蓄えられている理由を説明せよ。

演習 1(3) 静電容量を変えず、電圧だけを 8.0 V にした別の静電状態を考える。電荷とエネルギーを求め、初めの状態に対する倍率を答えよ。

演習 1(1)〜演習 1(3)の解答・解説は、末尾の「解答 1」を参照せよ。

演習 2

真空中の平行板コンデンサーを考える。初めの静電容量は 4.0 μF、電圧は 5.0 V である。

極板の対向面積を一定にして、間隔を d から $2d$ に広げる。端効果、摩擦、放射などの損失を無視し、十分ゆっくり変更する。初めと終わりは静電平衡にある。

外力の仕事は、コンデンサー系へエネルギーを与える向きを正とする。

演習 2(1) 間隔を広げた後の静電容量を求めよ。

演習 2(2) 充電後に電池から両端を切り離し、電荷が漏れないようにして間隔を広げた。変更後の電荷・電圧・蓄積エネルギーと外力の仕事を求めよ。

演習 2(3) 理想 5.0 V 電池につないだまま間隔を広げた。変更後の電荷・電圧・蓄積エネルギー、電池の仕事および外力の仕事を求めよ。

演習 2(1)〜演習 2(3)の解答・解説は、末尾の「解答 2」を参照せよ。

©ミライコーチング

演習 3

真空中の平行板コンデンサーがあり、初めの静電容量は 3.0 μF、電圧は 4.0 V である。

極板の面積と間隔を固定し、比誘電率 $\kappa = 2$ の均質な誘電体を極板間に隙間なく完全に挿入する。

挿入は十分ゆっくり行い、端効果、摩擦、放射などの損失を無視する。初めと終わりは静電平衡であり、外力の仕事はコンデンサー系へエネルギーを与える向きを正とする。

演習 3(1) 充電後に電池から両端を切り離し、電荷が漏れない状態で挿入した。挿入後の静電容量・電荷・電圧・蓄積エネルギーと外力の仕事を求めよ。

演習 3(2) 理想 4.0 V 電池につないだまま挿入した。挿入後の静電容量・電荷・電圧・蓄積エネルギー、電池の仕事および外力の仕事を求めよ。また、外力の仕事の符号が意味するエネルギーの行き先を説明せよ。

演習 3(1)〜演習 3(2)の解答・解説は、末尾の「解答 3」を参照せよ。

演習 4

静電容量が一定の 4.0 μF である、初めに電荷を持たないコンデンサーを、最終電圧 5.0 V まで充電する。

演習 4(1) 電源電圧をコンデンサーの電圧に合わせて少しずつ変え、損失なく可逆的に充電した。最終電荷と蓄積エネルギーを求めよ。

演習 4(2) 理想 5.0 V 電池から抵抗を介して充電し、最終的に静電平衡に達した。構造は固定され、放射などの他の損失はない。電池の仕事と抵抗で発生する熱を求めよ。

演習 4(3) 演習 4(1)と演習 4(2)では、最終的な蓄積エネルギーが同じでも電源の仕事が異なる。その理由を電圧–電荷グラフの面積を用いて説明せよ。

演習 4(1)〜演習 4(3)の解答・解説は、末尾の「解答 4」を参照せよ。

演習 5

コンデンサーについて、次の 3 つの説明が正しいか誤りかを答え、それぞれ理由を説明せよ。

演習 5(1) 「コンデンサーを充電した後、電池から両端を切り離せば、蓄積エネルギーはどのような操作をしても変わらない。」

演習 5(2) 「理想電池にコンデンサーをつないでいれば、電池がコンデンサーへする仕事は必ず正になる。」

演習 5(3) 「コンデンサーの 2 枚の極板の自由電荷は $+Q$ と $-Q$ なので、合計の電荷は 0 である。したがって、コンデンサーに蓄積されたエネルギーも必ず 0 である。」

演習 5(1)〜演習 5(3)の解答・解説は、末尾の「解答 5」を参照せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

解答 1

演習 1(1)の解答・解説

電荷は $Q = CV$ より、

$$\begin{aligned} Q &= 3.0\,\mu\mathrm{F} \times 4.0\,\mathrm{V} \\ &= 12\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

となる。

答えは $12\,\mu\mathrm{C}$ である。

演習 1(2)の解答・解説

蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\mathrm{C} \times 4.0\,\mathrm{V} \\ &= 24\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

答えは $24\,\mu\mathrm{J}$ である。

2 枚の極板の電荷の合計は 0 であるが、正負の電荷が分かれて電場がつくられているため、その電場にエネルギーが蓄えられている。

演習 1(3)の解答・解説

静電容量は $3.0\,\mu\mathrm{F}$ のままであり、電圧は $8.0\,\mathrm{V}$ となる。

$$\begin{aligned} Q &= 3.0\,\mu\mathrm{F} \times 8.0\,\mathrm{V} \\ &= 24\,\mu\mathrm{C} \\ U &= \frac{1}{2} \times 24\,\mu\mathrm{C} \times 8.0\,\mathrm{V} \\ &= 96\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

したがって、電荷は $12\,\mu\mathrm{C}$ から $24\,\mu\mathrm{C}$ へ 2 倍、エネルギーは $24\,\mu\mathrm{J}$ から $96\,\mu\mathrm{J}$ へ 4 倍となる。

静電容量一定では Q は V に比例し、U は V^2 に比例することと一致する。

解答 2

演習 2(1)の解答・解説

極板の対向面積を固定した真空平行板コンデンサーでは、静電容量は極板間隔に反比例する。

したがって、間隔が 2 倍になると

$$\begin{aligned} C_{\text{後}} &= \frac{1}{2} C_{\text{前}} \\ &= \frac{1}{2} \times 4.0\,\mu\text{F} \\ &= 2.0\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

である。

答えは $2.0\,\mu\text{F}$ である。

演習 2(2)の解答・解説

まず、初めの電荷とエネルギーを求める。

$$\begin{aligned} Q_{\text{前}} &= 4.0\,\mu\text{F} \times 5.0\,\text{V} \\ &= 20\,\mu\text{C} \\ U_{\text{前}} &= \frac{1}{2} \times 20\,\mu\text{C} \times 5.0\,\text{V} \\ &= 50\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

両端を電池から切り離し、電荷が漏れないため、電荷は一定である。

$$Q_{\text{後}} = 20\,\mu\text{C}$$

静電容量は $2.0\,\mu\text{F}$ となるため、

$$\begin{aligned} V_{\text{後}} &= \frac{20\,\mu\text{C}}{2.0\,\mu\text{F}} \\ &= 10\,\text{V} \\ U_{\text{後}} &= \frac{1}{2} \times 20\,\mu\text{C} \times 10\,\text{V} \\ &= 100\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

となる。

電池との仕事は 0 なので、外力の仕事は蓄積エネルギーの変化と等しい。

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= 100\,\mu\text{J} - 50\,\mu\text{J} \\ &= +50\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

よって、変更後の電荷は $20\,\mu\text{C}$、電圧は $10\,\text{V}$、蓄積エネルギーは $100\,\mu\text{J}$、外力の仕事は $+50\,\mu\text{J}$ である。

外力が与えたエネルギーが、蓄積エネルギーの増加になっている。

演習 2(3)の解答・解説

今回は電池との接続を保つので、電圧が一定である。

$$V_{後} = 5.0\,\mathrm{V}$$

変更後の静電容量は $2.0\,\mu\mathrm{F}$ なので、

$$\begin{aligned} Q_{後} &= 2.0\,\mu\mathrm{F} \times 5.0\,\mathrm{V} \\ &= 10\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{後} &= \frac{1}{2} \times 10\,\mu\mathrm{C} \times 5.0\,\mathrm{V} \\ &= 25\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

電池の仕事は

$$\begin{aligned} W_{電池} &= 5.0\,\mathrm{V} \times (10 - 20)\,\mu\mathrm{C} \\ &= -50\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

蓄積エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \Delta U &= 25\,\mu\mathrm{J} - 50\,\mu\mathrm{J} \\ &= -25\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} W_{外} &= \Delta U - W_{電池} \\ &= -25\,\mu\mathrm{J} - (-50\,\mu\mathrm{J}) \\ &= +25\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

よって、変更後の電荷は $10\,\mu\mathrm{C}$、電圧は $5.0\,\mathrm{V}$、蓄積エネルギーは $25\,\mu\mathrm{J}$、電池の仕事は $-50\,\mu\mathrm{J}$、外力の仕事は $+25\,\mu\mathrm{J}$ となる。

蓄積エネルギーの減少 $25\,\mu\mathrm{J}$ と外力から加えられた $25\,\mu\mathrm{J}$ が合わさり、電池へ $50\,\mu\mathrm{J}$ が戻る。

解答 3

演習 3(1)の解答・解説

初めの電荷とエネルギーは

$$\begin{aligned} Q_{\text{前}} &= 3.0\,\mu\text{F} \times 4.0\,\text{V} \\ &= 12\,\mu\text{C} \\ U_{\text{前}} &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 4.0\,\text{V} \\ &= 24\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

である。

比誘電率が 2 の誘電体を完全に挿入するので、

$$\begin{aligned} C_{\text{後}} &= 2 \times 3.0\,\mu\text{F} \\ &= 6.0\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

となる。

両端を切り離して電荷が漏れないため、

$$Q_{\text{後}} = 12\,\mu\text{C}$$

である。

電圧とエネルギーは

$$\begin{aligned} V_{\text{後}} &= \frac{12\,\mu\text{C}}{6.0\,\mu\text{F}} \\ &= 2.0\,\text{V} \\ U_{\text{後}} &= \frac{1}{2} \times 12\,\mu\text{C} \times 2.0\,\text{V} \\ &= 12\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

となる。

電池との接続はないため、

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \Delta U \\ &= 12\,\mu\text{J} - 24\,\mu\text{J} \\ &= -12\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

である。

よって、変更後は $C = 6.0\,\mu\text{F}$、$Q = 12\,\mu\text{C}$、$V = 2.0\,\text{V}$、$U = 12\,\mu\text{J}$、外力の仕事は $-12\,\mu\text{J}$ となる。

外部装置がコンデンサー系から $12\,\mu\text{J}$ の仕事を受け取ったことを意味する。

演習 3(2)の解答・解説

静電容量は $6.0\,\mu\mathrm{F}$ となる。

今回は電池との接続を保つので、電圧は一定である。

$$V_{後} = 4.0\,\mathrm{V}$$

電荷は

$$\begin{aligned} Q_{後} &= 6.0\,\mu\mathrm{F} \times 4.0\,\mathrm{V} \\ &= 24\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

となる。

蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned} U_{後} &= \frac{1}{2} \times 24\,\mu\mathrm{C} \times 4.0\,\mathrm{V} \\ &= 48\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

電池の仕事は

$$\begin{aligned} W_{電池} &= 4.0\,\mathrm{V} \times (24 - 12)\,\mu\mathrm{C} \\ &= +48\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

エネルギーの増加は

$$\begin{aligned} \Delta U &= 48\,\mu\mathrm{J} - 24\,\mu\mathrm{J} \\ &= +24\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

外力の仕事は

$$\begin{aligned} W_{外} &= \Delta U - W_{電池} \\ &= 24\,\mu\mathrm{J} - 48\,\mu\mathrm{J} \\ &= -24\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

よって、変更後は $C = 6.0\,\mu\mathrm{F}$、$Q = 24\,\mu\mathrm{C}$、$V = 4.0\,\mathrm{V}$、$U = 48\,\mu\mathrm{J}$、電池の仕事は $+48\,\mu\mathrm{J}$、外力の仕事は $-24\,\mu\mathrm{J}$ である。

電池が与えた $48\,\mu\mathrm{J}$ のうち、$24\,\mu\mathrm{J}$ が蓄積エネルギーの増加となり、残りの $24\,\mu\mathrm{J}$ が外部への仕事となる。

外力の仕事の負号は、外部装置がエネルギーを受け取ることを示している。

©ミライコーチング

解答 4

演習 4(1)の解答・解説

最終電荷は

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ &= 4.0\,\mu\mathrm{F} \times 5.0\,\mathrm{V} \\ &= 20\,\mu\mathrm{C} \end{aligned}$$

である。

蓄積エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2} \times 20\,\mu\mathrm{C} \times 5.0\,\mathrm{V} \\ &= 50\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

電源電圧をコンデンサーの電圧に合わせて可逆的に充電するため、電源がした仕事も $50\,\mu\mathrm{J}$ である。

したがって、最終電荷は $20\,\mu\mathrm{C}$、蓄積エネルギーは $50\,\mu\mathrm{J}$ である。

演習 4(2)の解答・解説

一定電圧 $5.0\,\mathrm{V}$ の電池から充電した場合、電池の仕事は

$$\begin{aligned} W_{\text{電池}} &= V_0 \Delta Q \\ &= 5.0\,\mathrm{V} \times 20\,\mu\mathrm{C} \\ &= 100\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $50\,\mu\mathrm{J}$ なので、

$$\begin{aligned} H &= W_{\text{電池}} - \Delta U \\ &= 100\,\mu\mathrm{J} - 50\,\mu\mathrm{J} \\ &= 50\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、電池の仕事は $100\,\mu\mathrm{J}$、抵抗で発生した熱は $50\,\mu\mathrm{J}$ となる。

演習 4(3)の解答・解説

電圧–電荷グラフで、横軸を移した電荷 q、縦軸をコンデンサーの電圧 V とする。

静電容量が一定なら $V = \frac{q}{C}$ であり、グラフは原点から最終状態までの直線となる。

可逆的に充電した場合、電源の仕事はその直線の下の三角形の面積である。

$$W_{\text{可逆}} = \frac{1}{2} \times 20\,\mu\text{C} \times 5.0\,\text{V} = 50\,\mu\text{J}$$

一方、一定電圧の電池がした仕事は、電圧 $5.0\,\text{V}$ と電荷 $20\,\mu\text{C}$ を辺とする長方形の面積である。

$$W_{\text{電池}} = 20\,\mu\text{C} \times 5.0\,\text{V} = 100\,\mu\text{J}$$

長方形と三角形の面積の差 $50\,\mu\text{J}$ は、抵抗で発生する熱に対応する。

つまり、最終的な電荷・電圧・蓄積エネルギーが同じでも、**どのような電圧の電源から、どのように充電したか**によって、電源の仕事が異なるのである。

解答 5

演習 5(1)の解答・解説

答えは **誤り** である。

電池から両端を切り離し、電荷の漏れがない場合に一定となるのは、片極板の自由電荷の大きさ Q である。

例えば、極板間隔を広げると静電容量が小さくなる。Q 一定のもとでは

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

なので、蓄積エネルギーは増加する。

この場合、外力がコンデンサー系へ正の仕事をしている。

したがって、電池から切り離したことだけを理由に、エネルギーが必ず一定であるとは判断できない。

演習 5(2)の解答・解説

答えは **誤り** である。

一定電圧 V_0 の理想電池に接続した状態では、

$$W_{\text{電池}} = V_0 \Delta Q$$

である。

静電容量が減少して電荷が減れば、$\Delta Q < 0$ となり、電池の仕事も負になる。

負の仕事は、コンデンサー系から電池へエネルギーが戻ることを意味する。

電池につながっているという条件だけでは、電池からコンデンサーへ一方向にエネルギーが供給されるとは限らない。

演習 5(3)の解答・解説

答えは **誤り** である。

コンデンサーの電荷 Q は、片極板に蓄えられた自由電荷の大きさを表す。

両極板には $+Q$ と $-Q$ があるので、合計の電荷は 0 である。しかし、正負の電荷は別々の極板に存在し、電位差と電場をつくっている。

充電されたコンデンサーには

$$U = \frac{1}{2}QV$$

のエネルギーが蓄えられる。

$Q > 0$、$V > 0$ なら $U > 0$ である。

したがって、両極板の電荷の合計が 0 であることと、蓄積エネルギーが 0 であることは同じ意味ではない。