

第 80 講 多項式の除法

学習目標

- 多項式の除法で、次数の高い項から順に商を決められる。
- 商の項を除式に掛け、被除式から引く操作を繰り返せる。
- 欠けた次数の項を係数 0 の項として補い、次数をそろえて計算できる。
- 余りの次数が除式の次数より低くなる所で計算を終えられる。
- 被除式 = 除式 $\times$ 商 + 余りの関係を使って検算できる。

解法の要点

多項式の除法では、次の順序を繰り返すことが基本である。

1. 残っている式の最高次の項を、除式の最高次の項で割って商の次の項を決める。
2. 決めた商の項を除式全体に掛ける。
3. 掛けてできた式を引く。
4. 余りの次数が除式の次数より低くなるまで繰り返す。

最後に、被除式 = 除式 $\times$ 商 + 余りとなることを確認する。

多項式も整数と同じ考え方で割る

整数の筆算では、上の位から商を決め、掛けて引く操作を繰り返す。多項式の除法でも考え方は同じであり、次数の高い項から商を決める。

例えば、 $2x^2 + 5x + 3$ を $x + 1$ で割るとする。

最初に、被除式の最高次の項 $2x^2$ を、除式の最高次の項 x で割る。

$$2x^2 \div x = 2x$$

したがって、商の最初の項は $2x$ である。

次に、 $2x$ を除式 $x + 1$ 全体に掛ける。

$$2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$$

これを被除式から引くと、

$$(2x^2 + 5x + 3) - (2x^2 + 2x) = 3x + 3$$

となる。

残った式 $3x + 3$ に対して同じ操作を繰り返す。このように、「最高次の項を割る」「掛ける」「引く」を繰り返すのが多項式の筆算である。

余りの次数で終了を判断する

多項式の除法は、余りが必ず 0 になるとは限らない。

被除式を A 、除式を B 、商を Q 、余りを R とすると、計算結果は

$$A = BQ + R$$

という関係になる。

余りが 0 でない場合、余りの次数は除式の次数より低くなければならない。

例えば、1 次式で割る場合、余りには x の項を残せない。そのため、余りは定数となる。2 次式で割る場合には、余りは 1 次式または定数までである。

余りの次数が除式以上であれば、まだ除法を続けられるので、そこで計算を終えてはならない。

欠けた次数には 0 を入れる

筆算では、同じ次数の項どうしを正しく引く必要がある。

例えば、

$$2x^3 - 5x + 4$$

には x^2 の項がない。このときは

$$2x^3 + 0x^2 - 5x + 4$$

と考える。

係数 0 の項を意識しておけば、 x^3 、 x^2 、 x 、定数項の位置がずれにくい。多項式の除法では、欠けた次数を見つけた時点で 0 を補って考えることが重要である。

例題

例題 1

$2x^2 + 5x + 3$ を $x + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

例題 1 の解答・解説

最初に最高次の項どうしを割る。

$$2x^2 \div x = 2x$$

商の最初の項は $2x$ である。 $2x$ を除式に掛けると、

$$2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$$

である。これを引くと、

$$(2x^2 + 5x + 3) - (2x^2 + 2x) = 3x + 3$$

となる。

残った式の最高次の項について、

$$3x \div x = 3$$

であるから、商の次の項は 3 である。

$$3(x + 1) = 3x + 3$$

を引くと余りは 0 となる。

したがって、商は $2x + 3$ 、余りは 0 である。

検算すると、

$$(x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3$$

となり、被除式に戻る。

例題 2

$x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

例題 2 の解答・解説

最高次の項から商を決める。

$$x^3 \div x = x^2$$

x^2 を除式に掛けると、

$$x^2(x - 2) = x^3 - 2x^2$$

である。これを引くと、

$$4x^2 - 5x + 1$$

が残る。

次に、

$$4x^2 \div x = 4x$$

であるから、

$$4x(x - 2) = 4x^2 - 8x$$

を引く。残る式は

$$3x + 1$$

である。

さらに、

$$3x \div x = 3$$

であるから、

$$3(x - 2) = 3x - 6$$

を引くと、余りは 7 となる。

したがって、商は $x^2 + 4x + 3$ 、余りは 7 である。

検算すると、

$$(x - 2)(x^2 + 4x + 3) + 7 = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$$

となり、被除式と一致する。

例題 3

$2x^3 - 5x + 4$ を $x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

例題 3 の解答・解説

被除式には x^2 の項がないため、

$$2x^3 + 0x^2 - 5x + 4$$

として次数をそろえる。

最高次の項から、

$$2x^3 \div x = 2x^2$$

である。除式に掛けると、

$$2x^2(x + 2) = 2x^3 + 4x^2$$

となる。これを引くと、

$$-4x^2 - 5x + 4$$

が残る。

続いて、

$$-4x^2 \div x = -4x$$

であるから、

$$-4x(x+2) = -4x^2 - 8x$$

を引くと、

$$3x + 4$$

となる。

さらに、

$$3x \div x = 3$$

であるから、

$$3(x+2) = 3x + 6$$

を引くと、余りは -2 である。

したがって、商は $2x^2 - 4x + 3$ 、余りは -2 である。

検算すると、

$$(x+2)(2x^2 - 4x + 3) - 2 = 2x^3 - 5x + 4$$

となる。

演習問題

演習問題 1

$3x^2 + 7x + 2$ を $x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 2

$2x^3 + x^2 - 8x + 5$ を $x - 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 3

$x^3 - 4x + 7$ を $x + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 4

$x^4 - 2x^3 + 5x - 3$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 5

$2x^3 + 3x^2 - x + 4$ を $x^2 + x - 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 6

$x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ を $x^2 + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題 7

$2x^4 - x^3 + 3x - 1$ を $x^2 + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

最高次の項から、

$$3x^2 \div x = 3x$$

である。

$$3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$$

を引くと $x + 2$ が残る。

次に、

$$x \div x = 1$$

であるから、 $x + 2$ を引くと余りは 0 となる。

したがって、商は $3x + 1$ 、余りは 0 である。

検算すると、

$$(x + 2)(3x + 1) = 3x^2 + 7x + 2$$

となる。

演習問題 2 の解答・解説

最初の商は $2x^3 \div x = 2x^2$ である。 $2x^2(x - 1) = 2x^3 - 2x^2$ を引くと、 $3x^2 - 8x + 5$ が残る。

次の商は $3x^2 \div x = 3x$ である。 $3x(x - 1) = 3x^2 - 3x$ を引くと、 $-5x + 5$ が残る。

最後に商へ -5 を立てる。 $-5(x - 1) = -5x + 5$ を引くと、余りは 0 となる。

したがって、商は $2x^2 + 3x - 5$ 、余りは 0 である。

検算すると、

$$(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$$

となる。

演習問題 3 の解答・解説

x^2 の項が欠けているため、

$$x^3 + 0x^2 - 4x + 7$$

として考える。

最初に商へ x^2 を立てる。

$$x^2(x + 1) = x^3 + x^2$$

を引くと、

$$-x^2 - 4x + 7$$

となる。

次に商へ $-x$ を立てると、

$$-x(x + 1) = -x^2 - x$$

である。これを引くと $-3x + 7$ が残る。
さらに商へ -3 を立てる。

$$-3(x + 1) = -3x - 3$$

を引くと、余りは 10 となる。
したがって、商は $x^2 - x - 3$ 、余りは 10 である。
検算すると、

$$(x + 1)(x^2 - x - 3) + 10 = x^3 - 4x + 7$$

となる。

演習問題 4 の解答・解説

被除式では x^2 の項が欠けているため、

$$x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 5x - 3$$

として考える。
最高次の項について、

$$x^4 \div x = x^3$$

である。

$$x^3(x - 2) = x^4 - 2x^3$$

を引くと、

$$0x^2 + 5x - 3$$

が残る。
この式の最高次は $5x$ である。 $5x \div x = 5$ なので、商に 5 を立てる。

$$5(x - 2) = 5x - 10$$

を引くと余りは 7 である。
したがって、商は $x^3 + 5$ 、余りは 7 である。
検算すると、

$$(x - 2)(x^3 + 5) + 7 = x^4 - 2x^3 + 5x - 3$$

となる。

演習問題 5 の解答・解説

除式は 2 次式であるため、余りの次数が 1 以下になれば終了である。
最初に、

$$2x^3 \div x^2 = 2x$$

とする。

$$2x(x^2 + x - 1) = 2x^3 + 2x^2 - 2x$$

を引くと、

$$x^2 + x + 4$$

が残る。
続いて、

$$x^2 \div x^2 = 1$$

である。

$$x^2 + x - 1$$

を引くと、余りは 5 となる。

したがって、商は $2x + 1$ 、余りは 5 である。余りは定数なので、その次数は除式の次数 2 より低い。検算すると、

$$(x^2 + x - 1)(2x + 1) + 5 = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$$

となる。

演習問題 6 の解答・解説

最高次の項から、

$$x^4 \div x^2 = x^2$$

である。

$$x^2(x^2 + 1) = x^4 + x^2$$

を引くと、

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 5$$

となる。

次に、

$$x^3 \div x^2 = x$$

であるから、

$$x(x^2 + 1) = x^3 + x$$

を引く。すると、

$$-4x^2 + x + 5$$

が残る。

さらに商へ -4 を立てる。

$$-4(x^2 + 1) = -4x^2 - 4$$

を引くと、余りは $x + 9$ となる。

したがって、商は $x^2 + x - 4$ 、余りは $x + 9$ である。余りは 1 次式であり、2 次式である除式より次数が低い。

検算すると、

$$(x^2 + 1)(x^2 + x - 4) + (x + 9) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 5$$

となる。

演習問題 7 の解答・解説

被除式では x^2 の項が欠けているため、

$$2x^4 - x^3 + 0x^2 + 3x - 1$$

として考える。

最初に、

$$2x^4 \div x^2 = 2x^2$$

である。

$$2x^2(x^2 + 1) = 2x^4 + 2x^2$$

を引くと、

$$-x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

となる。

次に、

$$-x^3 \div x^2 = -x$$

であるから、

$$-x(x^2 + 1) = -x^3 - x$$

を引く。残る式は

$$-2x^2 + 4x - 1$$

である。

さらに、

$$-2x^2 \div x^2 = -2$$

である。

$$-2(x^2 + 1) = -2x^2 - 2$$

を引くと、余りは $4x + 1$ となる。

したがって、商は $2x^2 - x - 2$ 、余りは $4x + 1$ である。余りは 1 次式なので、2 次式である除式より次数が低い。

検算すると、

$$(x^2 + 1)(2x^2 - x - 2) + (4x + 1) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1$$

となる。