第 033 講 運動量保存の条件

この講でできるようになること

- 解析する物体の集まりを「系」として選び、内力と外力を区別できる。
- 系全体の運動量変化と外力の力積の関係から、運動量保存の適用条件を判断できる。
- 方向ごとの保存、区間の両端だけで成立する保存、要求精度に応じた近似的保存を区別できる。
- 運動量保存から分かることと、運動エネルギーについて別に調べるべきことを説明できる。

1. 2 つの物体が力を及ぼし合うとき

滑らかな水平床の上に、物体 A と物体 B があるとする。2 つの物体が互いに力を及ぼし合うと、A も B も速度が変わり、それぞれの運動量が変化することがある。

ところが、2 つの物体をまとめて考えると、**A と B の運動量の和は変化しない**場合がある。個々の運動量は変わるのに、全体の運動量は変わらない。この違いを理解することが、運動量保存を使う出発点である。

運動量保存を考えるときは、まず「どの物体をまとめて考えるのか」を決める必要がある。

系を選ぶ

系と全運動量

系とは、解析の対象として選んだ物体の集まりである。

質量が一定の物体 A と物体 B をまとめて系とすると、その全運動量 $\vec{P}$ は、2 つの物体の運動量のベクトル和である。

$$\vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$$

ここで、m_A, m_B はそれぞれの質量、$\vec{v}_A, \vec{v}_B$ はそれぞれの速度である。全運動量の単位は $\mathrm{kg\,m/s}$ である。

一直線上の運動で右向きを正とすれば、符号付きの全運動量は次のように表せる。

$$P_x = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx}$$

左向きの運動量は負の値として足す。運動量の大きさだけを足すわけではない。

本講では、基本的に質量が変わらない 2 物体 A と B を扱い、対象とする時間区間の途中でも系の構成物体は変えない。

たとえば、A だけを系にする場合と、A+B を系にする場合とでは、同じ力でも分類が異なる。

©ミライコーチング

内力と外力

内力と外力

- **内力**：選んだ系に含まれる物体どうしが及ぼし合う力。
- **外力**：選んだ系の外にある物体から、系に含まれる物体へ働く力。

内力か外力かは、力の大きさや物体間の距離ではなく、**力を及ぼす側と受ける側が、選んだ系に含まれているか**によって決まる。

次の模式図では、滑らかな水平床上にある物体 A と B を、まとめて系 A+B として選ぶ。A と B は磁気的な反発などによって、互いに水平な力を及ぼし合っているとする。

左の A には B から左向きに 10 N、右の B には A から右向きに 10 N の力が働く。離して描いた物体が直接接触している図ではなく、2 物体の位置と力の受け手を区別するための模式図である。

図の水平な力の矢印は 1 N を 12 px として表し、どちらも長さ 120 px である。



図 1　系 A+B の水平内力対。左の物体が A、右の物体が B。鉛直のつり合う力は省略。

B が A へ及ぼす力を $\vec{F}_{BA}$、A が B へ及ぼす力を $\vec{F}_{AB}$ とする。作用反作用の法則により、この 2 力は大きさが等しく、向きが反対である。

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

ただし、$\vec{F}_{BA}$ は A に、$\vec{F}_{AB}$ は B に働く。**異なる物体に働く 2 力なので、A だけ、あるいは B だけの運動方程式で互いに打ち消すことはできない。**

系を A だけにすれば、B から A への力は外力である。一方、系を A+B にすれば、A と B が及ぼし合う 2 力は内力になる。

選んだ系	B から A への力	A から B への力
A だけ	A に働く外力	A には働かない
B だけ	B には働かない	B に働く外力
A+B	内力	内力

この図は水平な力だけを示した部分図である。実際には各物体に、床から上向きの垂直抗力と地球から下向きの重力が働く。滑らかな水平床上で鉛直加速度がないため、各物体でこれらの力はつり合っている。

図から省略した鉛直方向の力が、物理的に消えているわけではない。また、この図では水平な力による並進運動に注目し、回転は考えない。

2. 内力の力積は系全体で打ち消し合う

第 032 講で学んだように、物体の運動量の変化は、その物体が受けた合力の力積に等しい。

力積とは、力がある時間区間にわたって運動量をどれだけ変化させるかを表す量である。一定の力なら、力積は力と作用時間の積で求められる。

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t$$

力積の単位 N s は、運動量の単位 kg m/s と等しい。

ここで、ある時刻から別の時刻までの同じ時間区間について、A と B の運動量変化を考える。

A が受ける内力の力積と B が受ける内力の力積は、作用反作用の法則によって、互いに反対向きになる。

$$\vec{J}_{BA} + \vec{J}_{AB} = \vec{0}$$

A と B の運動量変化を足すと、これらの内力の力積は相殺する。

つまり、内力によって A の運動量が減少しても、その分だけ B の運動量が増加する場合がある。

ただし、系の外から力が働いていれば、その影響まで打ち消されるとは限らない。

系全体の運動量と外力の力積

質量と構成物体が一定の系について、ある時間区間の全運動量の変化は、その区間に系が受けた外力の力積の合計に等しい。

$$\vec{P}_{後} - \vec{P}_{前} = \vec{J}_{外}$$

$\vec{J}_{外}$ は、すべての外力の力積を向きも含めて足したものである。

外力の力積の合計がゼロなら、次の関係が成り立つ。

$$\vec{P}_{後} = \vec{P}_{前}$$

これが、選んだ系についての**運動量保存**である。

運動量保存を判断する順序

1. どの物体を系に含めるか決める。
2. どの時間区間の前後を比較するか決める。
3. 調べる方向と正方向を決める。
4. 系に働く外力と、その区間の外力の力積を調べる。
5. 外力の力積がゼロか、必要な精度で無視できるかを判断する。

内力が存在するかどうかではなく、外力の力積がどうなるかが保存の判断基準である。

3. 外力がある場合の運動量

今度は、同じ系 A+B に、外部から水平な力を加える。

次の模式図では、左向き 2 N の一定の外力が A に働く。右向きを正とすると、系 A+B への水平外力は $-2\,\mathrm{N}$ である。

矢印の尺度は先ほどと同じく、1 N を 12 px で表すものとし、今回の外力の矢印は 24 px である。



図 2　系 A+B へ外から働く水平力 2N。内力と鉛直につり合う力は省略。

この図でも A と B の間の相互作用は存在し得るが、見やすくするために内力の矢印は描いていない。また、各物体の垂直抗力と重力はつり合っており、図から省略している。

外力が A にだけ加わったとしても、求めるのは系 A+B 全体の運動量変化である。

右向きを正にして、外力 $-2\,\mathrm{N}$ が $0.50\,\mathrm{s}$ 作用した場合、水平外力の力積は

$$J_{外,x} = (-2\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s})$$
$$= -1.0\,\mathrm{N\,s}$$

となる。

したがって、系全体の水平運動量は $1.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ だけ減少する。この区間では外力の力積がゼロではないため、水平運動量は保存しない。

外力の大きさだけを見て「小さい力だから保存する」と判断してはいけない。力が働く時間も含めて、力積を確かめる必要がある。

厳密な保存と区間の端点での保存

外力の合力が各瞬間にゼロであれば、系全体の運動量はその間ずっと一定である。

一方、外力の合力が途中でゼロでなくても、正向きと負向きの力積が打ち消し合い、区間全体の合計がゼロになることがある。

その場合、**区間の最初と最後の全運動量は等しいが、途中の全運動量まで一定とは限らない。**

外力の条件	判断できること
各瞬間の外力の合力がゼロ	その間ずっと全運動量が一定
区間全体の外力の合計力積が厳密にゼロ	区間の両端の全運動量が等しい
外力の合計力積がゼロでない	区間の両端の全運動量は異なる
外力の合計力積を要求精度で無視できる	その精度で両端の全運動量を近似的に等しいと扱える

運動量保存を適用するときは、「どの区間について、どの意味で保存すると判断したか」を明確にする。

4. 方向ごとに保存を判断する

運動量は向きのある量である。そのため、外力の力積も水平方向と鉛直方向に分けて判断できる。

右向きを x 軸の正、上向きを y 軸の正とすると、次の関係がそれぞれ成り立つ。

$$P_{x,\text{後}} - P_{x,\text{前}} = J_{\text{外},x}$$

$$P_{y,\text{後}} - P_{y,\text{前}} = J_{\text{外},y}$$

たとえば、空中で 2 物体 A と B が互いに力を及ぼし合っていて、系 A+B に働く外力が重力だけであるとする。空中なので床からの垂直抗力は働かず、空気抵抗も無視する。

このとき、重力は鉛直下向きに働くが、水平方向には外力が働かない。

したがって、水平運動量は保存する。一方、鉛直運動量は重力の力積によって変化する。

つまり、**ある方向の運動量が保存しても、別の方向の運動量まで保存するとは限らない。**

水平床上で重力と垂直抗力がつり合っている状況とは、鉛直方向の外力条件が異なることに注意する。

5. 近似的な運動量保存

現実の物体には、重力や摩擦力など、さまざまな外力が働く。そのため、外力の合計力積が厳密にゼロとは限らない。

それでも、調べる区間で外力の力積が十分小さければ、必要な精度の範囲で運動量が保存すると近似できる場合がある。

たとえば、非常に短い相互作用時間を考える場合でも、「短時間だから必ず保存する」とは言えない。外力が大きければ、短時間でも無視できない力積になるからである。

近似を使うときには、外力の力積を、問題で重要となる運動量の大きさと比較する。

©ミライコーチング

近似的保存で注意すること

外力の力積を無視できるかどうかは、要求される精度と比較する量によって決まる。

初めの系全体の運動量がゼロである場合、その値を分母にして相対誤差を求めることはできない。必要に応じて、個々の物体に典型的に現れる運動量など、ゼロでない比較尺度を明示する。

また、外力の力積の上限が分かっても、その上限だけから実際の力積が厳密にゼロであるとは判断できない。

6. 運動量保存と運動エネルギー保存は別である

2 物体の相互作用では、系全体の運動量が保存していても、運動エネルギーの和が変化する場合がある。

物体の運動エネルギー K は、質量 m と速さ v を使って

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

と表す。運動量では速度の向きが符号に現れるが、運動エネルギーは速度の 2 乗によって決まるため、運動方向によらず非負になる。

2 物体の運動量保存は、外力の力積から判断する。一方、運動エネルギーが保存するかどうかは、相互作用でどのようなエネルギーの変化が起こるかを別に調べなければならない。

たとえば、相互作用後に 2 物体が一体となって動く場合、運動量が保存していても運動エネルギーが減少することがある。減少した運動エネルギーは、物体の変形や内部エネルギーなど、別の形のエネルギーへ移る場合がある。

ただし、「一体になる」という終状態は、運動量保存の式だけから決まるわけではない。そのような状態は、問題の条件として与えられる必要がある。

7. 例題で保存条件を使う

1

滑らかな水平床上で、質量 $2\,\mathrm{kg}$ の物体 A と質量 $3\,\mathrm{kg}$ の物体 B が互いに相互作用する。

A と B を合わせて系とし、相互作用の前から後までを対象区間とする。右向きを正とし、この区間の水平外力の合計力積はゼロである。また、各物体の重力と床からの垂直抗力はつり合っている。

相互作用前の速度は、A が $+4\,\mathrm{m/s}$、B が $+1\,\mathrm{m/s}$ であった。相互作用後、A の速度は $+1\,\mathrm{m/s}$ となった。

(1) 相互作用前の系全体の水平運動量を求めよ。

(2) 相互作用後の B の速度を求めよ。

(3) A と B それぞれの水平運動量変化を求め、系全体でどのような関係になっているか説明せよ。

解答・解説

(1) 系は A+B であり、2 物体の符号付き運動量を足す。

$$\begin{aligned} P_{\text{前},x} &= (2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(3\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +8\,\mathrm{kg\,m/s} + 3\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +11\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

答えは $+11\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

(2) 水平外力の合計力積がゼロなので、系全体の水平運動量は保存する。B の相互作用後の速度を $v_{B,\text{後}}$ とする。

$$\begin{aligned} +11\,\mathrm{kg\,m/s} &= (2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(3\,\mathrm{kg})v_{B,\text{後}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{B,\text{後}} &= \frac{11\,\mathrm{kg\,m/s} - 2\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} \\ &= +3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

したがって、B の速度は右向き $3\,\mathrm{m/s}$ である。

(3) A の運動量変化は

$$\begin{aligned} \Delta p_{A,x} &= (2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad -(2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= -6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。B の運動量変化は

$$\begin{aligned} \Delta p_{B,x} &= (3\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad -(3\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \Delta P_x &= -6\,\mathrm{kg\,m/s} + 6\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

A の運動量は減少し、B の運動量は増加している。しかし、変化量を足すとゼロになるため、系全体の運動量は変わらない。**保存するのは A と B の運動量の和であり、A と B それぞれの運動量ではない**。

2

質量の合計が 4 kg である 2 物体 A と B を系に選ぶ。2 物体は滑らかな水平床上にあり、右向きを正とする。

初めの系全体の水平運動量は $+10\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。対象とする 0.50 s の間、系全体に働く水平外力の合力は一定で、左向き 2 N である。

各物体の鉛直方向の重力と垂直抗力はつり合っている。

(1) この区間の水平外力の力積を求めよ。

(2) 区間の終わりの系全体の水平運動量を求め、運動量保存が成立するか答えよ。

(3) この情報だけで、A と B それぞれの終速度を求めることができるか説明せよ。

解答・解説

(1) 左向きの外力は負であるため、

$$\begin{aligned} J_{\text{外},x} &= (-2\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= -1.0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

(2) 系全体の運動量変化は外力の力積に等しい。

$$\begin{aligned} P_{\text{後},x} &= P_{\text{前},x} + J_{\text{外},x} \\ &= +10\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad -1.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +9.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

外力の力積がゼロでないため、区間の前後で水平運動量は保存しない。

(3) **それぞれの終速度は、この情報だけでは決まらない。**

求めたのは A と B の運動量の和である。質量の合計と全運動量だけでは、それぞれの質量や運動量の分配が分からないため、個別の終速度は一意に決まらない。

外力がどちらの物体に加わるかによって個々の運動量変化の様子は変わり得るが、系全体の運動量変化は外力の合計力積から求められる。

©ミライコーチング

3

質量が一定の 2 物体 A と B を合わせた系について、右向きを正とする。対象区間は 0 s から 1.00 s までであり、初めの水平全運動量を P_0 とする。

水平外力の合力は、最初の 0.50 s で一定の $+4\,\mathrm{N}$、続く 0.50 s で一定の $-4\,\mathrm{N}$ である。これ以外に水平外力はなく、鉛直外力の合力はゼロである。

(1) 0.50 s 後の水平全運動量は、初めからどれだけ変化するか。

(2) 1.00 s 後の水平全運動量は、初めと比べてどうなるか。

(3) 「この系の水平全運動量は、1.00 s の間ずっと一定である」という説明が正しいか判断せよ。

解答・解説

(1) 最初の区間の力積は

$$\begin{aligned} J_1 &= (+4\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= +2.0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。

したがって、0.50 s 後の水平全運動量は、初めより $+2.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ 変化している。

(2) 次の区間の力積は

$$\begin{aligned} J_2 &= (-4\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= -2.0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。

区間全体では

$$\begin{aligned} J_{\text{外},x} &= +2.0\,\mathrm{N\,s} - 2.0\,\mathrm{N\,s} \\ &= 0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。よって、1.00 s 後の全運動量は P_0 に戻る。

(3) **正しくない。**

初めと終わりの運動量は等しいが、途中の 0.50 s では初めから $+2.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ 変化している。

この例は、外力が存在しても区間全体の力積が相殺されることと、全期間を通して運動量が一定であることが異なると示している。

演習問題

1

滑らかな水平床上に、質量 1 kg の物体 A と質量 3 kg の物体 B がある。

初め、A と B はともに静止しており、2 物体の間にある質量を無視できる圧縮されたばねによって押し合う。ばねが伸び、2 物体が十分離れた後には、ばねの力が働かなくなるものとする。

系は A+B とし、初めの静止状態から、ばねの力が働かなくなった直後までを対象区間とする。右向きを正とし、床は滑らかで、ばね以外からの水平外力は働かない。質量を無視したばねが A と B に及ぼす力は、各瞬間に大きさが等しく反対向きとする。各物体の重力と垂直抗力はつり合う。

十分離れた後、A の速度は $-6\,\mathrm{m/s}$ であった。

(1) 初めの系全体の水平運動量を求め、対象区間で運動量保存が成立する理由を述べよ。

(2) ばねの力が働かなくなった直後の B の速度を求めよ。

(3) A と B それぞれの水平運動量変化を求め、A と B の運動量が個別に保存したか答えよ。

2

質量 1 kg の物体 A が、滑らかな水平床上を右向き $6\,\mathrm{m/s}$ で運動している。前方には質量 2 kg の静止した物体 B がある。

系は A+B とし、A と B が接触する直前から、相互作用を終えた直後までを対象区間とする。右向きを正とし、この区間の水平外力の合計力積はゼロである。各物体の重力と垂直抗力はつり合う。

相互作用後には、**A と B が一体となり、同じ速度で動く**ことが条件として与えられている。

(1) 初めの系全体の水平運動量を求めよ。

(2) 相互作用後の共通速度を求めよ。

(3) 相互作用前後の運動エネルギーの和をそれぞれ求め、運動量保存と運動エネルギー保存の関係を説明せよ。

©ミライコーチング

3

空中にある質量が一定の 2 物体 A と B が、互いに力を及ぼし合っている。系は A+B で、質量の合計は 2 kg である。

対象区間は 0.10 s とする。右向きを x 軸の正、上向きを y 軸の正とする。空気抵抗を無視し、系に働く外力は地球からの重力だけである。床との接触はないため、垂直抗力は働かない。

重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、区間の初めの系全体の運動量を

$$\vec{P}_{\text{前}} = (6, 4)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

とする。括弧内は順に x 成分、y 成分である。

(1) 対象区間で系が受ける外力の力積を、x 成分と y 成分に分けて求めよ。

(2) 区間の終わりの系全体の運動量の各成分を求めよ。

(3) 水平方向と鉛直方向のそれぞれについて、運動量保存が成立するか答え、その理由を説明せよ。

4

2 物体 A と B が相互作用する短い時間区間について、系を A+B とし、水平方向の運動量保存を近似的に使えるか検討する。右向きを正とする。

対象区間は 0.010 s であり、この間に系が受ける水平外力の合力の大きさは、どの時刻でも高々 1 N と分かっている。

この問題では、相互作用の代表的な運動量の大きさを $5.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ として比較する。鉛直方向の力はつり合っており、水平外力の力積だけを評価する。

(1) 水平外力の正味の力積の大きさについて、求められる上限を答えよ。

(2) その上限が比較尺度 $5.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ の何%に相当するか求めよ。また、要求精度が約 1 % のとき、外力の力積を無視する近似が可能か判断せよ。

(3) 要求精度が 0.01 % の場合、同じ情報だけから外力の力積を無視できると断定できるか説明せよ。

(4) 系全体の初めの運動量がゼロだった場合、初めの全運動量を分母にした相対誤差の評価が適切か答えよ。

©ミライコーチング

5

滑らかな水平床上にある物体 A と B が、磁気的な反発によって互いに力を及ぼし合っている。左に A、右に B があり、右向きを正とする。

ある時間区間の途中で、B が A へ左向き 10 N、A が B へ右向き 10 N の力を及ぼしているとする。

各物体の重力と床からの垂直抗力はつり合い、水平外力は A と B の相互作用によるもの以外にはない。

(1) 系を A だけに選んだ場合、B が A へ及ぼす力は内力と外力のどちらか答えよ。また、A が B へ及ぼす力を A に働く力として扱ってよいか答えよ。

(2) 系を A+B に選び、相互作用が始まる直前から終わる直後までを対象区間としたとき、2 つの相互作用力は内力と外力のどちらに分類されるか答えよ。また、この区間の水平全運動量が保存するか説明せよ。

(3) 「2 つの力の大きさが等しいので、A と B それぞれの水平運動量は変わらない」という説明が正しいか判断せよ。

6

質量が一定の 2 物体 A と B を合わせた系について、3 つの異なる外力条件を比較する。

いずれも同じ系 A+B を選び、右向きを正として、0 s から 1.00 s までを対象区間とする。初めの水平全運動量は $+2.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

鉛直方向の外力はつり合い、水平外力の合力は次の条件で与えられる。

条件	0 〜 0.50 s	0.50 〜 1.00 s
ア	0 N	0 N
イ	+3 N	−3 N
ウ	+1 N	+1 N

各区間では、表に示した水平外力の合力が一定である。

(1) 条件ア、イ、ウについて、1.00 s 全体の水平外力の力積をそれぞれ求めよ。

(2) 条件ア、イ、ウについて、1.00 s 後の水平全運動量をそれぞれ求めよ。

(3) 3 つの条件を、「全期間で全運動量が一定」「区間の両端でのみ等しい」「区間の両端でも等しくない」に分類せよ。条件イについては、0.50 s 後の全運動量も求め、判断の根拠を示せ。

(4) 「外力が少しでも存在する系では、対象区間の初めと終わりの運動量が等しくなることはない」という説明が正しいか判断せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 初めは A も B も静止しているため、系全体の水平運動量は

$$\begin{aligned} P_{\text{前},x} &= (1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(3\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

系は A+B であり、ばねは系に含めていない。そのため、ばねが A と B に及ぼす水平な力は、どちらもこの系への外力である。ただし、質量を無視したばねが及ぼす 2 力は各瞬間に大きさが等しく反対向きなので、同じ対象区間で 2 力の力積は打ち消し合う。

また、床は滑らかで、ばね以外からの水平外力はなく、重力と垂直抗力は鉛直方向でつり合う。したがって、対象区間の水平外力の合計力積はゼロであり、水平全運動量は保存する。

(2) B の終速度を $v_{B,\text{後}}$ とする。運動量保存より、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg})(-6\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(3\,\mathrm{kg})v_{B,\text{後}} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} v_{B,\text{後}} &= \frac{+6\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} \\ &= +2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

B は右向き 2 m/s で運動する。

(3) A の運動量変化は

$$\begin{aligned}\Delta p_{A,x} &= (1\,\mathrm{kg})(-6\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad -(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= -6\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

となる。B の運動量変化は

$$\begin{aligned}\Delta p_{B,x} &= (3\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad -(3\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

である。

2 物体の運動量変化の和は

$$\begin{aligned}\Delta P_x &= -6\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +6\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

となる。

したがって、**A と B それぞれの運動量は保存していないが、A+B の全運動量は保存している。**

初めの全運動量がゼロであっても、個々の物体が運動できないわけではない。反対向きの運動量が打ち消し合えば、全運動量はゼロのままである。

2

(1) 初めの系全体の運動量は、A と B の運動量を足して

$$\begin{aligned}P_{\text{前},x} &= (1\,\mathrm{kg})(+6\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s}\end{aligned}$$

となる。

(2) 水平外力の合計力積はゼロなので、水平全運動量が保存する。

相互作用後、2 物体が一体となって同じ速度 v で動くことは問題の条件として与えられている。この条件を用いて、

$$\begin{aligned} +6\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg}+2\,\mathrm{kg})v \\ &= (3\,\mathrm{kg})v \end{aligned}$$

と表せる。

したがって、

$$\begin{aligned} v &= \frac{+6\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} \\ &= +2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

共通速度は右向き 2 m/s である。

(3) 相互作用前の運動エネルギーの和は

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

相互作用後は A と B が同じ速度で動くため、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(3\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

運動エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \Delta K &= 6\,\mathrm{J}-18\,\mathrm{J} \\ &= -12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

つまり、運動エネルギーの和は 12 J 減少している。

一方、運動量は初めも終わりも +6 kg m/s であり、保存している。

したがって、**運動量保存と運動エネルギー保存は同じ条件ではない。**

この例では運動エネルギーの一部が物体の変形や内部エネルギーなどへ移り得る。運動エネルギーの減少は、エネルギー全体が消失したことを意味しない。

3

(1) 外力は重力のみである。系の質量の合計は $2\,\mathrm{kg}$、重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ である。
重力の水平成分はゼロなので、水平外力の力積は

$$J_{外,x} = 0\,\mathrm{N\,s}$$

である。
鉛直方向は上向きを正とするため、重力の合力は

$$\begin{aligned} F_{外,y} &= -(2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= -20\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。
したがって、鉛直方向の力積は

$$\begin{aligned} J_{外,y} &= (-20\,\mathrm{N})(0.10\,\mathrm{s}) \\ &= -2.0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。
外力の力積の成分は

$$\vec{J}_{外} = (0, -2.0)\,\mathrm{N\,s}$$

となる。

(2) 系全体の運動量変化は外力の力積に等しい。
水平方向については、

$$\begin{aligned} P_{x,後} &= 6\,\mathrm{kg\,m/s} + 0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。
鉛直方向については、

$$\begin{aligned} P_{y,後} &= 4\,\mathrm{kg\,m/s} - 2\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。
したがって、終わりの全運動量は

$$\vec{P}_{後} = (6, 2)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

(3) **水平方向では運動量が保存するが、鉛直方向では保存しない。**

水平方向には外力の力積がないため、全運動量の水平成分は変わらない。

一方、鉛直方向には重力による負の力積が働き、上向きの全運動量成分が減少する。

2 物体の間に働く内力は両物体の運動量を変化させ得るが、系全体では相殺する。鉛直方向の全運動量変化を生じさせるのは、系の外にある地球から受ける重力の力積である。

空中なので、床からの垂直抗力を重力とつり合わせてはいけない。

4

(1) 対象区間の長さは 0.010 s であり、水平外力の合力の大きさは常に 1 N 以下である。

したがって、水平外力の正味の力積の大きさは、最大でも

$$\begin{aligned} |\,J_{\text{外},x}\,| &\le (1\,\mathrm{N})(0.010\,\mathrm{s}) \\ &= 0.010\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。

これは上限であり、実際の力積の大きさが必ず 0.010 N s になることを意味しない。

(2) 比較尺度を 5.0 kg m/s とすると、

$$\frac{0.010\,\mathrm{kg\,m/s}}{5.0\,\mathrm{kg\,m/s}} \times 100\,\% = 0.20\,\%$$

となる。

外力の力積の上限は、指定された比較尺度の 0.20 % に相当する。

要求精度が約 1 % であれば、外力の力積による系全体の運動量変化の上限は、その精度より小さい。

したがって、この比較尺度と要求精度において、外力の力積を無視し、水平運動量が近似的に保存すると扱うことが可能である。

ただし、厳密な保存が証明されたわけではない。

(3) **この情報だけでは、無視できると断定できない。**

上限の 0.20 % は、要求精度の 0.01 % より大きい。

実際の外力の力積がさらに小さい可能性はあるが、与えられた上限だけでは 0.01 % 以内に収まることを保証できない。

(4) **適切ではない。**

系全体の初めの運動量がゼロなら、それを分母にした比は計算できない。

この問題では、別に指定された代表的な運動量 5.0 kg m/s を比較尺度として用いる。得られた 0.20 % は、この比較尺度に対する外力の力積の上限の割合である。

それを無条件に「各物体の運動量変化の相対誤差」と読み替えることもできない。

運動量保存を近似的に使うときは、**何と比較して、どの程度のずれを許すのか**を明らかにする必要がある。

©ミライコーチング

5

(1) 系を A だけに選ぶと、B は系の外にある。

したがって、B が A へ及ぼす左向き 10 N の力は、A に働く**外力**である。

一方、A が B へ及ぼす右向き 10 N の力は、B に働く力であって A に働く力ではない。

そのため、この 2 力を A だけに作用する力として足して、ゼロとすることはできない。

(2) 系を A+B に選ぶと、B から A への力も、A から B への力も、系の内部にある物体どうしの相互作用である。

したがって、2 力は**内力**である。

作用反作用の法則により、2 力は同じ時刻で大きさが等しく、向きが反対である。相互作用の区間全体で考えると、それぞれの力積も互いに打ち消し合う。

また、系 A+B に外部から加わる水平な力はない。床は滑らかで、各物体の重力と垂直抗力も鉛直方向でつり合っている。

よって、対象区間の水平外力の合計力積はゼロであり、系 A+B の水平全運動量は保存する。

(3) **正しくない**。

左向きの力を受ける A では運動量が左向きに変化し、右向きの力を受ける B では運動量が右向きに変化する。

2 つの運動量変化は反対向きであり、系全体で足すと相殺するが、個々の変化までゼロになるわけではない。

この問題で与えられた 10 N は、ある時刻における力の大きさである。個々の運動量変化の数値を求めるには、その力が時間とともにどのように働いたかという力積の情報が必要である。

力の大きさが等しいということだけから、A と B それぞれの運動量が保存すると判断してはいけない。

©ミライコーチング

6

(1) 各条件について、対象区間全体の水平外力の力積を求める。

条件アでは、外力の合力が常にゼロなので、

$$J_{ア} = 0\,\mathrm{N\,s}$$

である。

条件イでは、最初の区間の力積が

$$\begin{aligned} J_{イ,1} &= (+3\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= +1.5\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

であり、後半の力積が

$$\begin{aligned} J_{イ,2} &= (-3\,\mathrm{N})(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= -1.5\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} J_{イ} &= +1.5\,\mathrm{N\,s} \\ &\quad -1.5\,\mathrm{N\,s} \\ &= 0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

条件ウでは、全期間を通して一定の外力が働くため、

$$\begin{aligned} J_{ウ} &= (+1\,\mathrm{N})(1.00\,\mathrm{s}) \\ &= +1.0\,\mathrm{N\,s} \end{aligned}$$

となる。

©ミライコーチング

(2) 系全体の運動量変化は、各条件の外力の力積に等しい。

条件アでは、

$$\begin{aligned} P_{\text{ア},\text{後}} &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

条件イでも、

$$\begin{aligned} P_{\text{イ},\text{後}} &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

条件ウでは、

$$\begin{aligned} P_{\text{ウ},\text{後}} &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +1.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +3.0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

(3) 分類は次のようになる。

条件	分類	理由
ア	全期間で一定	外力の合力が各瞬間にゼロ
イ	両端では等しいが途中は一定でない	正負の力積が区間全体で相殺
ウ	両端でも等しくない	外力の合計力積が正の値

条件イについて、前半 $0.50\,\mathrm{s}$ の力積は $+1.5\,\mathrm{N\,s}$ であった。

したがって、$0.50\,\mathrm{s}$ 後の全運動量は

$$\begin{aligned} P_{\text{イ},0.50} &= +2.0\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +1.5\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +3.5\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

これは初めの $+2.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ と異なるため、条件イでは全期間を通して運動量が一定ではない。

(4) **正しくない**。

条件イでは、外力の合力がゼロでない時間帯がある。しかし、最初の正向きの力積と後半の負向きの力積が打ち消し合うため、区間全体の力積はゼロになる。

その結果、区間の最初と最後の全運動量は等しくなる。

したがって、運動量保存を判断する際は、外力の存在だけで結論を出すのではなく、選んだ系に対して、対象区間で外力の力積がどうなるかを調べる必要がある。

©ミライコーチング