

第 23 講 余弦定理

学習目標

- 三角形で、辺 a, b, c と向かい合う角 A, B, C の対応を判断できる。
- 余弦定理を、三平方の定理を広げた関係として説明できる。
- 2 辺とその間の角から、残りの 1 辺を求められる。
- 3 辺の長さから、角の余弦や特別な角の大きさを求められる。

三平方の定理では足りない三角形を考える

直角がなくても辺と角を結びつけない

直角三角形では、三平方の定理によって 3 辺の長さを結びつけられます。

しかし、一般の三角形には直角があるとは限りません。

たとえば、2 辺の長さが 5 と 7、その間の角が 60° と分かっている、そのまま三平方の定理を使うことはできません。

そこで、三平方の定理に「角の情報」を加えて、一般の三角形まで広げた関係を使います。それが余弦定理です。

辺と角の対応を確認する

角の向かいの辺を同じ文字でそろえる

三角形 ABC で、角 A の向かいの辺 BC を a 、角 B の向かいの辺 CA を b 、角 C の向かいの辺 AB を c とします。

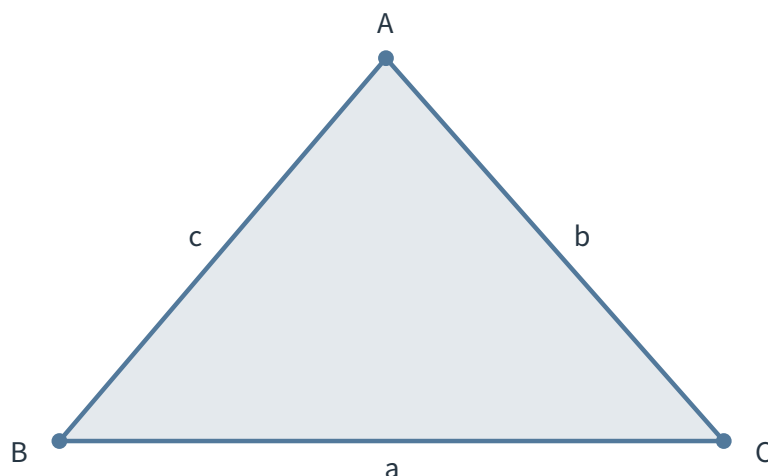


図 1 角 A と辺 a 、角 B と辺 b 、角 C と辺 c の対応

余弦定理では、求めたい辺の向かいにある角を確認することが大切です。たとえば辺 a を求める式には、向かいの角 A が現れます。

辺と角の対応

- ・ 辺 a の向かい角は角 A
- ・ 辺 b の向かい角は角 B
- ・ 辺 c の向かい角は角 C

余弦定理を使う前に、この対応を図で確認します。

余弦定理**余弦定理**

三角形 ABC で、辺 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とすると、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

が成り立ちます。

同様に、

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

が成り立ちます。

これらを**余弦定理**といいます。

覚える形は 1 つ

3 本を別々に暗記する必要はありません。

「求めたい辺の 2 乗」について、

残り 2 辺の 2 乗の和 $- 2 \times$ 残り 2 辺 $\times$ その間の角の余弦

と考えます。

辺 a を求めるなら、残りの辺は b, c 、その間の角は A なので、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

となります。

なぜ三平方の定理の広がりなのか**角が 90° なら三平方の定理になる**

余弦定理で $A = 90^\circ$ とします。

$\cos 90^\circ = 0$ なので、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

です。

したがって、

$$a^2 = b^2 + c^2$$

となります。

これは三平方の定理そのものです。

余弦定理は、直角三角形だけで使えた三平方の定理を、一般の三角形へ広げたものと見るができます。

余弦の項が角の違いを表す

余弦定理の $-2bc \cos A$ の部分が、角 A が直角からどのように違うかを反映しています。
 $A = 90^\circ$ では $\cos A = 0$ なので、この項が消えて三平方の定理になります。

2 辺とその間の角から残りの辺を求める

余弦定理を使いやすい代表的な形

辺 b 、辺 c 、その間の角 A が分かっていて、向かいの辺 a を求める場合を考えます。
このとき、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

へそのまま代入できます。

特に $A = 60^\circ$ 、 120° など、余弦の値が分かる角では計算しやすくなります。

2 辺とその間の角から辺を求める

$b = 3$ 、 $c = 5$ 、 $A = 60^\circ$ とします。

余弦定理より、

$$a^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 60^\circ$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $a^2 = 9 + 25 - 15 = 19$ です。

辺の長さは正なので、 $a = \sqrt{19}$ です。

3 辺から角を調べる

余弦定理を角について使う

3 辺 a, b, c が分かっているときは、余弦定理から $\cos A$ を求められます。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

を整理すると、

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

です。

したがって、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

となります。

$\cos A$ が $\frac{1}{2}$ 、 0 、 $-\frac{1}{2}$ などの特別な値なら、角 A も判断できます。

余弦の符号から角の種類も分かる

$0^\circ < A < 180^\circ$ では、

- $\cos A > 0$ なら A は鋭角
- $\cos A = 0$ なら $A = 90^\circ$
- $\cos A < 0$ なら A は鈍角

です。

3 辺から $\cos A$ を求めれば、その角が鋭角・直角・鈍角のどれかも判断できます。

『2 辺と 1 角』なら何でも同じ式ではない

辺 b, c と角 A が分かっている場合、角 A は b と c の間の角です。
余弦定理で辺を直接求めやすいのは、**2 辺とその間の角**が分かっているときです。
与えられた角がどの 2 辺の間にあるかを図で確認してから式を選びます。

例題**例題 1**

三角形 ABC で、 $b = 4$ 、 $c = 6$ 、 $A = 60^\circ$ とする。
辺 a の長さを求めなさい。

例題 1 の解答・解説

辺 a の向かいが角 A なので、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

を使います。
値を代入すると、

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$$

です。
したがって、 $a^2 = 16 + 36 - 24 = 28$ です。
辺の長さは正なので、 $a = 2\sqrt{7}$ です。

例題 2

三角形 ABC で、 $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 8$ とする。
 $\cos A$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

余弦定理より、

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos A$$

です。
したがって、 $49 = 89 - 80 \cos A$ です。
よって、 $80 \cos A = 40$ なので、 $\cos A = \frac{1}{2}$ です。

例題 3

三角形 ABC で、 $a = 5$ 、 $b = 3$ 、 $c = 4$ とする。
角 A を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

余弦定理より、

$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos A$$

です。

$25 = 25 - 24 \cos A$ なので、 $\cos A = 0$ です。

$0^\circ < A < 180^\circ$ で $\cos A = 0$ となるのは $A = 90^\circ$ です。

したがって、 $A = 90^\circ$ です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 $b = 5$ 、 $c = 7$ 、 $A = 60^\circ$ とする。
辺 a の長さを求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 $a = 4$ 、 $c = 6$ 、 $B = 60^\circ$ とする。
辺 b の長さを求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 $a = 5$ 、 $b = 7$ 、 $C = 120^\circ$ とする。
辺 c の長さを求めなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 $a = 6$ 、 $b = 5$ 、 $c = 7$ とする。
 $\cos A$ を求めなさい。

練習問題 5

三角形 ABC で、 $a = 7$ 、 $b = 8$ 、 $c = 5$ とする。
 $\cos B$ を求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC で、 $a = 6$ 、 $b = 3$ 、 $c = 3\sqrt{3}$ とする。
角 A を求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC で、 $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 3$ とする。
角 A が鋭角・直角・鈍角のどれであるか、余弦定理を使って判断しなさい。

練習問題 8

ある生徒は、 $b = 4$ 、 $c = 5$ 、 $A = 60^\circ$ の三角形で、

$$a^2 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 60^\circ$$

として計算しました。

この式の誤りを説明し、正しい a^2 の値を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

余弦定理より、

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 60^\circ$$

です。

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $a^2 = 25 + 49 - 35 = 39$ です。

したがって、 $a = \sqrt{39}$ です。

練習問題 2 の解答・解説

辺 b の向かいが角 B なので、

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

を使います。

したがって、 $b^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$ です。

よって、 $b = 2\sqrt{7}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

辺 c の向かいが角 C です。

余弦定理より、

$$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 120^\circ$$

です。

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ なので、 $c^2 = 25 + 49 + 35 = 109$ です。

したがって、 $c = \sqrt{109}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

余弦定理を角 A について使います。

$$6^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos A$$

です。

したがって、 $36 = 74 - 70 \cos A$ です。

よって、 $70 \cos A = 38$ なので、 $\cos A = \frac{19}{35}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

辺 b の向かいが角 B です。

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos B$$

より、 $64 = 74 - 70 \cos B$ です。

したがって、 $70 \cos B = 10$ なので、 $\cos B = \frac{1}{7}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

余弦定理より、

$$6^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \cos A$$

です。

$36 = 9 + 27 - 18\sqrt{3} \cos A$ なので、 $\cos A = 0$ です。

したがって、 $A = 90^\circ$ です。

練習問題 7 の解答・解説

余弦定理から、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

です。

値を代入すると、

$$\cos A = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

です。

$\cos A < 0$ なので、角 A は鈍角です。

練習問題 8 の解答・解説

余弦定理では、余弦を含む項の前はマイナスです。

正しい式は、

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 60^\circ$$

です。

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $a^2 = 16 + 25 - 20 = 21$ です。

したがって、正しい値は $a^2 = 21$ です。