第 229 講 内分点・外分点の位置ベクトル

学習目標

- 線分を $m:n$ に内分する点の位置ベクトルを求められる。
- 2 点を結ぶ線分を $m:n$ に外分する点の位置ベクトルを求められる。
- 内分の係数が反対側の比になり、外分の分母が差になる理由を説明できる。
- 外分では点の並びに 2 通りがあり、$m=n$ のときは有限の外分点がないことを説明できる。

1. 内分点の位置ベクトル

内分

点 P が線分 AB 上にあり、$AP:PB=m:n$ を満たすとき、点 P は線分 AB を $m:n$ に内分するという。ただし、m,n は正の数である。

内分点の公式を導く

点 A,B,P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\vec{b},\vec{p}$ とする。$AP:PB=m:n$ であり、$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{PB}$ は同じ向きである。このとき、次の 2 式が成り立つ。

$$n\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$$

2 式から $\overrightarrow{PB}$ を消去すると $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ である。ここへ $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ を代入して整理する。

$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

これが内分点の公式である。



図 1　線分ABを$1:2$に内分する点P

係数は反対側の比である

A の位置ベクトル $\vec{a}$ には PB 側の比 n が掛かり、B の位置ベクトル $\vec{b}$ には AP 側の比 m が掛かる。

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

n を固定して m を大きくすると $\vec{b}$ の係数が大きくなり、P は B に近づく。このことからも係数の順序を確認できる。

例題 1：位置ベクトルで内分点を求める

点 A, B の位置ベクトルが $\vec{a}, \vec{b}$ である。線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルを求めよ。

例題 1 の解答・解説

$m=2, n=3$ である。反対側の比を係数とする計算は次の通りである。

$$\vec{p} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3}$$

$$= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

例題 2：座標で内分点を求める

点 $A(-2, 1)$、$B(4, 7)$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$m=1, n=2$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p} = \frac{2(-2, 1) + 1(4, 7)}{3}$$

$$= \frac{(0, 9)}{3}$$

$$= (0, 3)$$

したがって、$P(0, 3)$ である。

2. 外分点の位置ベクトル

外分

点 P が直線 AB 上で線分 AB の外側にあり、距離の比 $AP:PB = m:n$ を満たすとき、点 P は線分 AB を $m:n$ に外分するという。ただし、m, n は正の数である。

外分点の公式を導く

$AP:PB=m:n$ であり、向き付きベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{PB}$ は反対向きである。長さの比と向きを同時に表す式は次の通りである。

$$n\overrightarrow{AP}=-m\overrightarrow{PB}$$

ここへ $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$、$\overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{p}$ を代入して整理する。

$$n(\vec{p}-\vec{a})=-m\left(\vec{b}-\vec{p}\right)$$

$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

これが外分点の公式である。$m>n$ なら点の並びは A,B,P である。$m<n$ なら分母 $m-n$ が負になるため、点の並びは P,A,B となる。同じ式で両方の場合を表せる。



図 2　線分ABを3 : 1に外分する点P

外分では分母が差になる

外分では向き付きの関係を使うため、分母は符号を含む差 $m-n$ である。$m>n$ なら $AP-PB=AB$ であり、$m<n$ なら $PB-AP=AB$ である。

$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}\qquad(m\neq n)$$

$m>n$ なら A,B,P、$m<n$ なら P,A,B の順に並ぶ。式を使った後、点の位置と距離の比を確かめることが大切である。



図 3　線分ABを$1:3$に外分する点P

$m=n$ のとき

$m=n$ では外分点の式の分母が 0 になる。これは公式が使えないだけではない。直線 AB 上で A, B から等距離にある点は中点だけであり、その点は線分の内側にある。したがって、$1:1$ に外分する有限の点は存在しない。

例題 3：$m>n$ の外分点

点 $A(0,0)$、$B(4,0)$ を結ぶ線分を $3:1$ に外分する点 P の座標を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$m=3, n=1$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p}=\frac{-1(0,0)+3(4,0)}{3-1}$$
$$=(6,0)$$

したがって、$P(6,0)$ であり、点の並びは A, B, P である。実際、$AP:PB=6:2=3:1$ である。

例題 4：$m<n$ の外分点

点 $A(0,0)$、$B(4,0)$ を結ぶ線分を $1:3$ に外分する点 P の座標を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$m=1, n=3$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p}=\frac{-3(0,0)+1(4,0)}{1-3}$$
$$=(-2,0)$$

したがって、$P(-2,0)$ であり、点の並びは P, A, B である。実際、$AP:PB=2:6=1:3$ である。

©ミライコーチング

3. 演習問題

演習 1：内分点の位置ベクトル

$AP:PB=3:2$ となる内分点 P の位置ベクトルを、$\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

演習 2：中点

点 $A(-4,2)$、$B(6,8)$ の中点 P の座標を求めよ。

演習 3：座標の内分

点 $A(1,-2)$、$B(7,4)$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点 P の座標を求めよ。

演習 4：外分点の位置ベクトル

$AP:PB=4:1$ となる外分点 P の位置ベクトルを、$\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

演習 5：$m>n$ の座標の外分

点 $A(1,2)$、$B(5,4)$ を結ぶ線分を $3:1$ に外分する点 P の座標を求めよ。

演習 6：$m<n$ の座標の外分

点 $A(-1,1)$、$B(3,5)$ を結ぶ線分を $1:2$ に外分する点 P の座標を求めよ。

演習 7：位置と比の検算

点 $A(0,0)$、$B(6,0)$ に対し、点 $P(9,0)$ は線分 AB を何対何に外分するか。点の並びも答えよ。

演習 8：公式の理由を説明する

内分点の公式で $\vec{a}$ の係数が n、$\vec{b}$ の係数が m になる理由を、n を固定して m が大きくなる場合を用いて説明せよ。また、外分点の公式の分母が $m-n$ になる理由を説明せよ。

4. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$m=3,n=2$ であるから、$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ である。

演習 2 の解答・解説

中点は $1:1$ の内分点であるから、$\vec{p}=\frac{(-4,2)+(6,8)}{2}=(1,5)$ である。したがって、$P(1,5)$ である。

演習 3 の解答・解説

$m=2, n=1$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p} = \frac{1(1,-2)+2(7,4)}{3}$$
$$= (5,2)$$

したがって、$P(5,2)$ である。

演習 4 の解答・解説

$m=4, n=1$ であるから、$\vec{p} = \frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}$ である。

演習 5 の解答・解説

$m=3, n=1$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p} = \frac{-(1,2)+3(5,4)}{2}$$
$$= (7,5)$$

したがって、$P(7,5)$ である。$m>n$ なので、点の並びは A, B, P である。

演習 6 の解答・解説

$m=1, n=2$ である。計算は次の通りである。

$$\vec{p} = \frac{-2(-1,1)+(3,5)}{1-2}$$
$$= (-5,-3)$$

したがって、$P(-5,-3)$ である。$m<n$ なので、点の並びは P, A, B である。

演習 7 の解答・解説

$AP=9$、$PB=3$ であるから、$AP:PB=9:3=3:1$ である。点の並びは A, B, P である。

演習 8 の解答・解説

内分では n を固定して m を大きくすると A から進む割合が大きくなり、P は B に近づく。したがって、B の位置ベクトル $\vec{b}$ の係数が m となり、残る A 側の係数が n となる。外分では向き付きの関係を用いる。$m>n$ のときは $AP-PB=AB$、$m<n$ のときは $PB-AP=AB$ である。比の差を符号付きで表すと $m-n$ となるため、外分点の公式の分母は $m-n$ となる。