第 237 講 二次曲線とは何か

学習目標

- 二次曲線を、x, y についての二次方程式で表される曲線と、距離条件を満たす点の軌跡という 2 つの見方で説明できる。
- 放物線・楕円・双曲線を、焦点と準線または 2 焦点からの距離の条件で区別できる。
- 基本形の方程式から曲線の種類を判断し、与えられた点が曲線上にあるか確かめられる。

1. 二次曲線には「式」と「距離」の 2 つの顔がある

直線の次に現れる曲線

直線は x, y の一次方程式で表された。x, y についての二次方程式で表される平面上の曲線を二次曲線という。本講では、実点をもち退化していない円・放物線・楕円・双曲線を扱う。
方程式だけを見ると形の異なる曲線の集まりに思える。しかし、それぞれは「決まった点や直線からの距離が、ある条件を満たす点の集合」として定められる。式は計算に強く、距離による定義は曲線が生まれる理由を示す。両方を行き来することが二次曲線を理解する軸になる。

基本形から見た二次曲線

原点を中心または頂点とし、座標軸に沿う代表的な基本形は次の通りである。

曲線	基本形の例	形を見抜く手掛かり
円	$x^2+y^2=r^2 \quad (r>0)$	x^2, y^2 の係数が等しく、同符号
放物線	$y^2=4x$	一方だけが二次、他方は一次
楕円	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	2 つの二乗項が同符号で、係数が異なる
双曲線	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$	2 つの二乗項が異符号

ただし、係数の符号だけで判定する方法は、上のように整理された基本形で使う。本講ではこの基本形を扱い、平行移動した曲線は第 241 講で扱う。

例題 1：基本形から曲線を分類する

次の方程式が表す二次曲線の種類を答えよ。
(1) $y^2=12x$
(2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
(3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1$
(4) $x^2+y^2=16$

例題 1 の解答・解説

(1) y だけが二次で x が一次だから、放物線である。
(2) x^2, y^2 がともに正の係数で加えられているから、楕円である。
(3) x^2, y^2 の係数の符号が異なるから、双曲線である。
(4) x^2, y^2 の係数がともに 1 で等しいから、円である。

©ミライコーチング

2. 放物線は「1 点と 1 直線から等距離」の軌跡である

放物線の焦点と準線

定点 F と、F を通らない定直線 l がある。点 F までの距離と直線 l までの距離が等しい点 P の軌跡を放物線という。F を焦点、l を準線という。垂足を H とすれば、$PF = d(P,l) = PH$ である。
点から直線までの距離は、点から直線へ下ろした垂線の長さである。下図では H がその垂線の足であり、放物線上の点 P は $PF = PH$ を満たす。

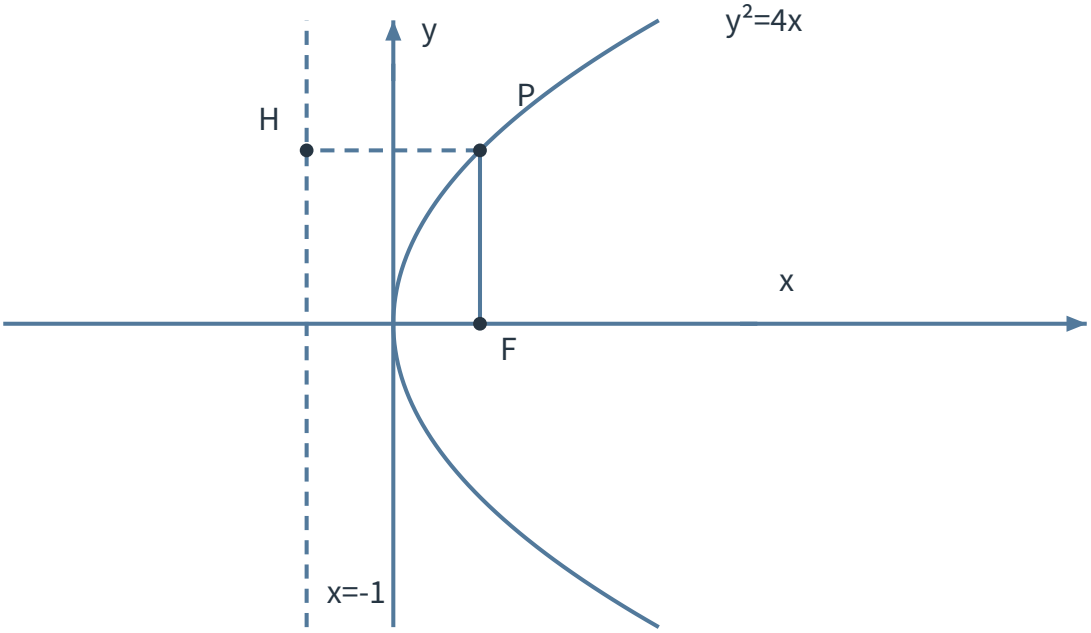

図 1　焦点 F と準線 x=-1 から等距離にある点 P が描く放物線

距離の条件が方程式になる

上図で $F(1,0)$、準線を $x=-1$ とする。点 $P(x,y)$ から準線までの距離は $|\,x+1\,|$ である。条件 $PF = d(P,l)$ の両辺を二乗すると、

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2$$

となる。展開して整理すれば $y^2 = 4x$ を得る。距離の条件を二乗して整理した結果が二次方程式になるのである。

例題 2：距離の条件から曲線を選ぶ

次の条件で定まる曲線の種類を答えよ。
(1) 定点 F までの距離と、F を通らない定直線 l までの距離が等しい。
(2) 異なる 2 定点 F_1, F_2 までの距離の和が一定値 k であり、$k > F_1F_2$ である。
(3) 異なる 2 定点 F_1, F_2 までの距離の差の絶対値が一定値 k であり、$0 < k < F_1F_2$ である。

©ミライコーチング

例題 2 の解答・解説

(1) 1 つの焦点と 1 本の準線から等距離にある点の軌跡だから、放物線である。
(2) 2 焦点までの距離の和が一定だから、楕円である。
(3) 2 焦点までの距離の差の絶対値が一定だから、双曲線である。差には左右の順序があるため、絶対値を付ける。

3. 楕円と双曲線は 2 焦点からの距離で区別する

楕円は距離の和が一定

異なる 2 定点 F_1, F_2 からの距離の和 $PF_1 + PF_2$ が一定値 k である点 P の軌跡を楕円という。ただし $k > F_1F_2$ とする。F_1, F_2 を焦点という。
和を一定に保つには、一方の焦点から遠ざかる分だけ、もう一方へ近づく必要がある。その結果、2 焦点を囲む閉じた曲線になる。

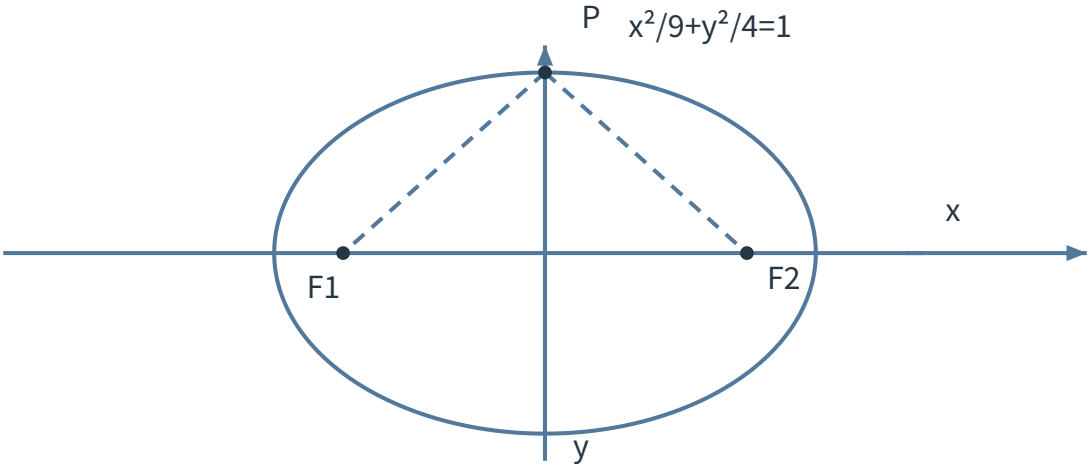

図 2　2 焦点 F1、F2 からの距離の和が 6 である楕円

双曲線は距離の差の絶対値が一定

異なる 2 定点 F_1, F_2 からの距離の差の絶対値 $|PF_1 - PF_2|$ が一定値 k である点 P の軌跡を双曲線という。ただし $0 < k < F_1F_2$ とする。F_1, F_2 を焦点という。
差の絶対値を使うため、$PF_1 - PF_2$ が一定の部分と $PF_2 - PF_1$ が一定の部分が現れ、曲線は左右など 2 つの枝に分かれる。

©ミライコーチング

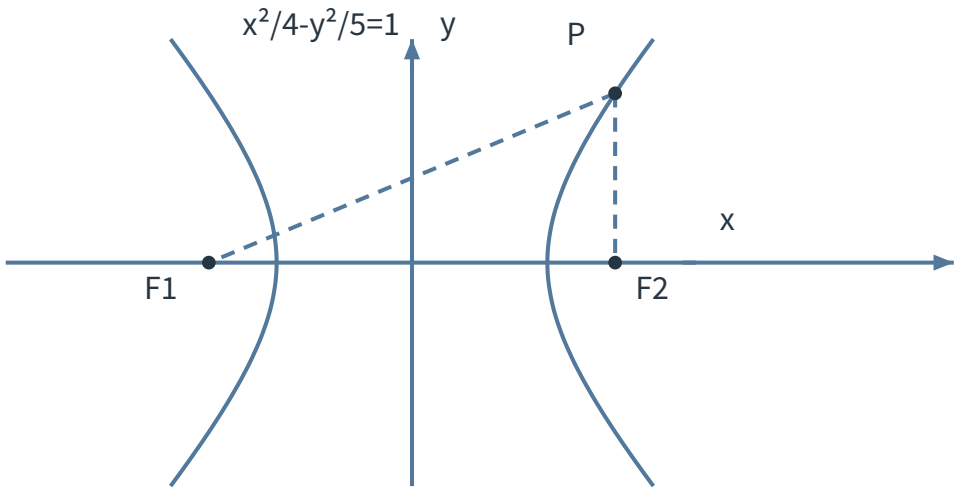

図 3　2 焦点 F1、F2 からの距離の差の絶対値が 4 である双曲線

例題 3：点が曲線上にあるか確かめる

点 $A(0,2)$、$B(3,0)$ について、楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上にあるか判定せよ。

例題 3 の解答・解説

$A(0,2)$ を左辺へ代入すると、$\frac{0^2}{9}+\frac{2^2}{4}=1$ だから、A は楕円上にある。
$B(3,0)$ を左辺へ代入すると、$\frac{3^2}{9}+\frac{0^2}{4}=1$ だから、B も楕円上にある。曲線上の点であることは、座標を方程式へ代入して等式が成り立つかで判定できる。

4. 演習問題

演習 1：二次曲線の分類

次の方程式が表す二次曲線の種類を答えよ。
(1) $x^2=8y$
(2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
(3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

演習 2：基本形へ直して判定する

$4x^2+9y^2=36$ が表す曲線の種類を、基本形へ直して答えよ。

演習 3：距離による定義

(1) 楕円では、2 焦点までの距離の何が一定であるか。
(2) 双曲線では、2 焦点までの距離の何が一定であるか。

©ミライコーチング

演習 4：曲線上の点の判定

点 $P(2,0)$、$Q(0,2)$ は、双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 上にあるか、それぞれ判定せよ。

演習 5：式と距離の見方を結ぶ

放物線・楕円・双曲線のうち、次の各条件に合うものを答えよ。
(1) 基本形で 2 つの二乗項の符号が異なる。
(2) 準線上にない 1 つの焦点と、その準線からの距離が等しい。
(3) 異なる 2 焦点までの距離の和が、焦点間距離より大きい一定値である。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) 一方だけが二次だから、放物線である。
(2) 2 つの二乗項が同符号で加えられているから、楕円である。
(3) 2 つの二乗項の係数が異符号だから、双曲線である。

演習 2 の解答・解説

両辺を 36 で割ると、$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ となる。2 つの二乗項が同符号で加えられているため、楕円である。

演習 3 の解答・解説

(1) 楕円では、2 焦点までの距離の**和**が一定である。
(2) 双曲線では、2 焦点までの距離の**差の絶対値**が一定である。単なる差では焦点を書く順序で符号が変わるため、絶対値が必要である。

演習 4 の解答・解説

$P(2,0)$ を左辺へ代入すると、$\frac{2^2}{4}-\frac{0^2}{5}=1$ となるため、P は双曲線上にある。
$Q(0,2)$ を左辺へ代入すると、左辺は $0-\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}$ であり、1 に等しくない。したがって、Q は双曲線上にない。

演習 5 の解答・解説

(1) 2 つの二乗項の符号が異なる基本形は、双曲線である。
(2) 焦点と準線から等距離にある点の軌跡は、放物線である。
(3) 2 焦点までの距離の和が一定である点の軌跡は、楕円である。

©ミライコーチング