第 227 講 内積と垂直条件

学習目標

- 0 でない 2 つのベクトルについて、垂直と内積 0 が同値である理由を説明できる。
- 成分表示から 2 つのベクトルが垂直であるか判定できる。
- 垂直条件を用いて未知の成分や文字の値を求められる。
- 零ベクトルでは垂直条件をそのまま使えないことを説明できる。

1. 内積 0 と垂直

垂直条件

$\vec{a}$、$\vec{b}$ がともに零ベクトルでないとき、
次の 2 条件は同値である。

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

である。「垂直なら内積は 0」と「内積が 0 なら垂直」の両方向を使える。

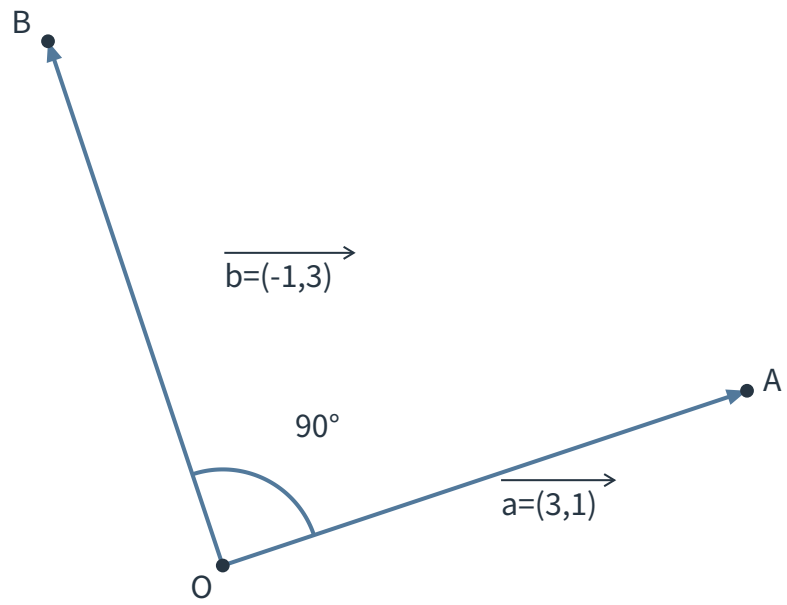

図 1　(3,1)と(-1,3)は内積が 0 で垂直である

なぜ内積 0 が直角を表すのか

0 でない 2 つのベクトルのなす角を θ とすると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である。$|\vec{a}||\vec{b}| > 0$ なので、内積が 0 であることは $\cos\theta = 0$ と同じである。$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ では、これは $\theta = 90^\circ$ と同値である。

©ミライコーチング

2. 零ベクトルの例外

内積が 0 だけでは垂直とは限らない

任意のベクトル $\vec{b}$ に対して $\vec{0}\cdot\vec{b}=0$ である。しかし、零ベクトルには向きがなく、他のベクトルとのなす角を定めない。したがって、零ベクトルを含む 2 つのベクトルを垂直とはいわない。
内積 0 から垂直を結論するときは、必ず両方が零ベクトルでないことを確かめる。

3. 成分による垂直条件

成分を掛けて足し、0 とおく

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ がともに零ベクトルでないとき、次の 2 条件は同値である。

$$\vec{a}\perp\vec{b},\qquad a_1b_1+a_2b_2=0$$

である。垂直を調べるときは、次の順に進める。
1. 2 つのベクトルが零ベクトルでないことを確かめる。
2. 対応する成分どうしを掛けて足す。
3. その値が 0 かを判定する。未知数があれば 0 とおいて解く。

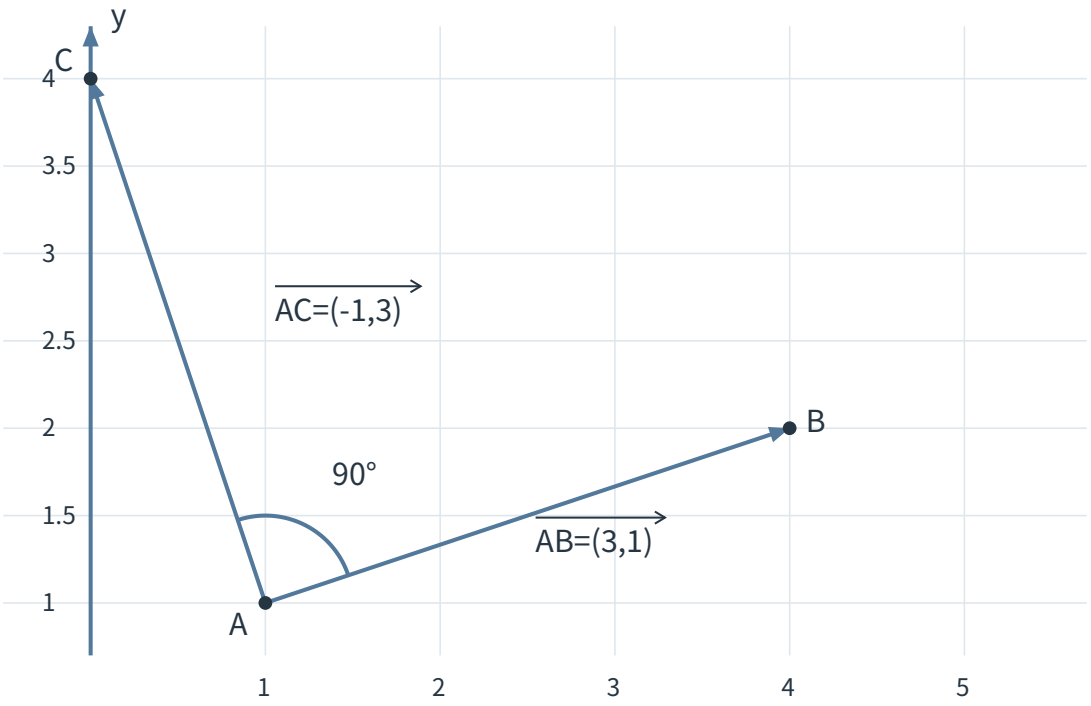

図 2　A(1,1)を始点とする垂直な 2 ベクトル

座標では終点から始点を引く

点 $A(1,1)$、$B(4,2)$、$C(0,4)$ では、$\overrightarrow{AB}=(3,1)$、$\overrightarrow{AC}=(-1,3)$ である。内積は $3\cdot(-1)+1\cdot3=0$ で、両方とも 0 でないから $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ である。

4. 例題

例題 1：垂直かを判定する

$\vec{a}=(2,-3)$、$\vec{b}=(6,4)$ は垂直であるか。

例題 1 の解答・解説

両方とも零ベクトルではない。また、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 6+(-3)\cdot 4=12-12=0$$

である。したがって、$\vec{a}\perp\vec{b}$ である。

例題 2：未知の成分を求める

$\vec{a}=(3,2)$、$\vec{b}=(x,-6)$ が垂直であるとき、x を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$\vec{a}$ は 0 でなく、$\vec{b}$ も第 2 成分が -6 なので 0 ではない。垂直条件より、

$$3x+2\cdot(-6)=0$$

である。よって $3x-12=0$ から、$x=4$ である。

例題 3：座標から垂直を示す

点 $A(1,2)$、$B(5,4)$、$C(2,0)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直であることを示せ。

例題 3 の解答・解説

$$\overrightarrow{AB}=(4,2),\qquad \overrightarrow{AC}=(1,-2)$$

であり、どちらも零ベクトルではない。さらに、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 1+2\cdot(-2)=0$$

である。したがって、$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ である。

例題 4：パラメータを定める

$\vec{a}=(t+1,2)$、$\vec{b}=(1,t-2)$ が垂直となる t を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$\vec{a}$ は第 2 成分が 2、$\vec{b}$ は第 1 成分が 1 なので、どの t でも両方とも零ベクトルではない。垂直条件より、

$$(t+1)\cdot 1+2(t-2)=0$$

である。よって $3t-3=0$ から、$t=1$ である。

©ミライコーチング

5. 演習問題

演習 1：垂直を判定する

$\vec{a}=(1,4)$、$\vec{b}=(-8,2)$ は垂直であるか。

演習 2：垂直でないことを示す

$\vec{a}=(2,1)$、$\vec{b}=(-1,3)$ は垂直であるか。

演習 3：未知の成分を求める

$\vec{a}=(5,-2)$、$\vec{b}=(x,10)$ が垂直となる x を求めよ。

演習 4：もう一方の成分を求める

$\vec{a}=(k,3)$、$\vec{b}=(6,-2)$ が垂直となる k を求めよ。

演習 5：座標から判定する

点 $A(-1,1)$、$B(2,3)$、$C(1,-2)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は垂直であるか。

演習 6：直角三角形を確かめる

点 $P(0,0)$、$Q(2,1)$、$R(-1,2)$ に対して、三角形 PQR が P を直角とする直角三角形であることを示せ。

演習 7：零ベクトルの例外

$\vec{a}=(0,0)$、$\vec{b}=(3,-1)$ について、内積を求め、2 つのベクトルが垂直といえるか答えよ。

演習 8：文字を含む垂直条件

$\vec{a}=(m,2m)$、$\vec{b}=(2,-1)$ について、内積を求めよ。また、$m=0$ の場合と $m\neq 0$ の場合に分けて、垂直であるか述べよ。

6. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

両方とも 0 でなく、$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-8)+4\cdot 2=0$ である。したがって、垂直である。

演習 2 の解答・解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+1\cdot 3=1\neq 0$ である。したがって、垂直ではない。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

両方とも常に 0 ではない。$5x + (-2) \cdot 10 = 0$ より、$5x - 20 = 0$ なので $x = 4$ である。

演習 4 の解答・解説

$\vec{a}$ は第 2 成分が 3、$\vec{b}$ は第 1 成分が 6 なので 0 ではない。$6k + 3 \cdot (-2) = 0$ より、$6k - 6 = 0$ なので $k = 1$ である。

演習 5 の解答・解説

$$\overrightarrow{AB} = (3, 2), \qquad \overrightarrow{AC} = (2, -3)$$

である。両方とも零ベクトルではない。内積は $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$ なので、垂直である。

演習 6 の解答・解説

$\overrightarrow{PQ} = (2, 1)$、$\overrightarrow{PR} = (-1, 2)$ はともに 0 でない。また、内積は $2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$ である。よって $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$ なので、三角形 PQR は P を直角とする直角三角形である。

演習 7 の解答・解説

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。しかし、$\vec{a}$ は零ベクトルで向きをもたないため、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとはいわない。

演習 8 の解答・解説

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m \cdot 2 + 2m \cdot (-1) = 0$$

である。$m = 0$ では $\vec{a} = \vec{0}$ なので垂直とはいわない。$m \neq 0$ では $\vec{a}$ と $\vec{b}$ はともに 0 でなく、内積が 0 なので垂直である。

©ミライコーチング