

第 164 講 仮説検定

学習目標

この講では、母標準偏差が既知の正規母集団について、母平均の仮説検定の考え方を理解することを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 帰無仮説を設定し、帰無仮説が正しいと仮定したときの標準化を行える。
- ・ 観測結果がどの程度珍しいかを標準正規分布で評価できる。
- ・ 有意水準を基準として、帰無仮説を棄却するか判断できる。
- ・ p 値の意味を理解し、検定結果を正しく文章で表現できる。

仮説検定で見るもの

母集団全体の平均 μ を直接知ることは難しいことが多い。そこで、観測した標本から「ある仮説が正しいとしたら、この結果はどの程度珍しいか」を調べる。

本講では、 n を正整数とし、独立な確率変数 X_i がそれぞれ

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, \dots, n$) に従う正規母集団を扱う。ここで $\sigma > 0$ は既知、 μ は未知の固定した実数である。

母平均の基準値 μ_0 は検定を行う前に指定した実数とする。確率変数としての標本平均を $\bar{X}$ 、実際に観測した値を $\bar{x}$ と区別して扱う。

本講で扱う数値は、理解のために設定した架空のモデルである。

母平均の両側検定

事前に指定した値を μ_0 とし、母平均について次の仮説を立てる。

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

H_0 を帰無仮説、 H_1 を対立仮説という。

H_0 が正しいと仮定すると、標本平均 $\bar{X}$ について

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

となる。

実際の観測値を用いた値は

$$z_{\text{obs}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

で表す。

注意すべき点は、標準正規分布に従うという性質は H_0 が正しいと仮定した場合だけである。 H_0 が偽の場合まで $Z \sim N(0, 1)$ と考えてはいけない。

棄却するかどうかの判断

両側検定では、観測された標本平均 $\bar{x}$ と帰無仮説で指定した値 μ_0 の差の大きさを見る。

有意水準とは、 H_0 が正しいときに誤って H_0 を棄却する割合を制御するための、検定を行う前に定める基準である。

有意水準は、次の意味ではない。

- H_0 が正しい確率
- 今回の結論が誤っている確率

本講では丸めた判定基準として、有意水準 5% では $|z_{\text{obs}}| \geq 1.96$ ならば H_0 を棄却し、 $|z_{\text{obs}}| < 1.96$ ならば H_0 を棄却しない。

有意水準 1% では、 $|z_{\text{obs}}| \geq 2.58$ ならば H_0 を棄却し、 $|z_{\text{obs}}| < 2.58$ ならば H_0 を棄却しない。等号の場合は棄却側に含める。

これらの臨界値は丸めた値であるため、 H_0 が正しいときの棄却確率はそれぞれ約 0.05、約 0.01 である。

なお、理論上の標準正規分布は連続分布であるため、境界となる 1 点が生じる確率は 0 である。ただし、本講では提示した判定基準に一貫して従う。

検定結果の表現

仮説検定では、次の表現を正しく使う。

- H_0 を棄却する場合：「この有意水準で、母平均が μ_0 と異なるを考える十分な証拠がある」
- H_0 を棄却しない場合：「この有意水準で、母平均が異なるという十分な証拠がない」

棄却したからといって、 H_1 が確実に証明されたわけではない。

また、棄却しない場合も、 H_0 が正しいと確定したり、 H_0 を採択したりするわけではない。

p 値による判断

p 値とは、 H_0 が正しいと仮定した下で、観測された結果と同程度以上に極端なずれが生じる確率である。

H_0 が正しいとき、 $Z \sim N(0, 1)$ として計算する。観測後の z_{obs} は固定された値として扱う。

両側検定では左右両方の極端な領域を見るため、 $p = P(|Z| \geq |z_{\text{obs}}|)$ となる。

$u = |z_{\text{obs}}| \geq 0$ とおく。

また、 $A(u) = P(0 \leq Z \leq u)$ とすると、 H_0 の下で $Z \sim N(0, 1)$ は 0 を中心に対称であるため、

$$\begin{aligned} p &= 2P(Z \geq u) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - A(u)\right) \end{aligned}$$

となる。

$u = 0$ の場合も、連続分布では 1 点の確率が 0 であるため、この関係は成立する。

p 値による判断では、 $0 < \alpha < 1$ を事前に指定した有意水準として、 $p \leq \alpha$ ならば H_0 を棄却する。ただし、本講の 1.96 や 2.58 は丸めた臨界値である。丸めて求めた p 値と臨界値による判定について、境界付近で完全に同値であると断定してはいけない。

本講の例題・演習では指定した棄却基準に一貫して従う。丸めた p 値だけで判断する場合は、境界付近の精度に注意する。

また、p 値は H_0 が正しい確率でも、今回観測された 1 点が出る確率でもない。検定方向や有意水準は観測前の計画として決定しておく。

結論を読むときの注意

統計的に有意であるかどうかは、 H_0 が正しいと仮定したモデルの下で観測結果がどの程度珍しいかに関する判断である。

統計的有意性だけから、差の実用上の大きさや因果関係が証明されるわけではない。

検定結果を読むときは、用いたモデルの条件と、事前に決めた検定方向・有意水準が適切であるかを確認する必要がある。

例題の共通条件と表

例題では、本講の条件に従い、独立な正規母集団から標本を取り出す架空のモデルを扱う。母標準偏差 σ は既知であり、母平均 μ について

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

の両側検定を行う。

標準正規分布表の値は、次のように丸めて掲載する。

u	$A(u) = P(0 \leq Z \leq u)$
1	≈ 0.3413
2.2	≈ 0.4861
3	≈ 0.49865

ここで、表の値は計算途中で使用する丸め値であり、真の確率と完全に一致する値ではない。

例題 1

母標準偏差が $\sigma = 10$ である正規母集団から、大きさ $n = 100$ の標本を無作為に抽出した。母平均について

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu \neq 50$$

を考える。

標本平均は $\bar{x} = 53$ であった。有意水準 5% で両側検定を行い、判断しなさい。

例題 1 の解答・解説

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定して標準化する。
標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

である。
したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{53 - 50}{1} = 3$$

となる。
有意水準 5% の両側検定では、 $|z_{\text{obs}}| \geq 1.96$ ならば棄却する。
ここでは $|3| \geq 1.96$ なので、 H_0 を棄却する。
また、標準正規分布表より
 $A(3) \approx 0.49865$ であるから、

$$\begin{aligned} p &= 2\left(\frac{1}{2} - A(3)\right) \\ &\approx 2(0.5 - 0.49865) \\ &\approx 0.00270 \end{aligned}$$

となる。
したがって、この有意水準 5% では、母平均が 50 と異なるを考える十分な証拠がある。

例題 2

例題 1 と同じ条件で、標本平均が $\bar{x} = 51$ であったとする。
有意水準 5% の両側検定を行い、判断しなさい。

例題 2 の解答・解説

標準誤差は例題 1 と同じく

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$$

である。
したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{51 - 50}{1} = 1$$

となる。

有意水準 5% の両側検定では、 $|z_{\text{obs}}| \geq 1.96$ を満たすかを見る。

しかし、 $|1| < 1.96$ であるため、 H_0 は棄却しない。

p 値を求めると、標準正規分布表より

$A(1) \approx 0.3413$ なので、

$$\begin{aligned} p &= 2\left(\frac{1}{2} - A(1)\right) \\ &\approx 2(0.5 - 0.3413) \\ &\approx 0.3174 \end{aligned}$$

となる。

この有意水準 5% では、母平均が 50 と異なるという十分な証拠がない。

ただし、これは母平均が 50 であることを証明したという意味ではない。

棄却域： $z \leq -1.96$ 棄却しない： $-1.96 < z < 1.96$ 棄却域： $z \geq 1.96$

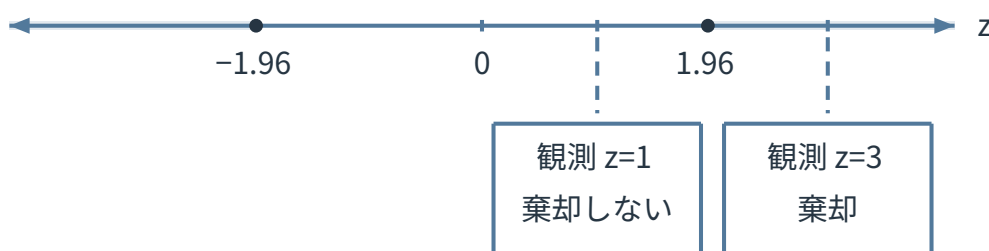


図 1 母標準偏差既知の正規母集団の両側検定で、5% 用に丸めた基準 $|z| \geq 1.96$ を用いる。境界を含む左右が棄却域で、中央は棄却しない範囲である。矢印の先にも範囲は続く。これは判定範囲の図であり、確率密度や面積を表さない。棄却しないことは帰無仮説が正しいとの証明ではない。

例題 3

例題 1 と同じ条件で、標本平均が $\bar{x} = 52.2$ であったとする。

有意水準 5% と 1% の両方で両側検定を行い、判断の違いを説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$$

である。

したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{52.2 - 50}{1} = 2.2$$

となる。

まず、有意水準 5% で考える。

判定基準は $|z_{\text{obs}}| \geq 1.96$ である。

ここでは $|2.2| \geq 1.96$ なので、 H_0 を棄却する。

次に、有意水準 1% で考える。

判定基準は $|z_{\text{obs}}| \geq 2.58$ である。

ここでは $|2.2| < 2.58$ なので、 H_0 は棄却しない。

p 値を確認すると、 $A(2.2) \approx 0.4861$ より、

$$\begin{aligned} p &= 2 \left(\frac{1}{2} - A(2.2) \right) \\ &\approx 2(0.5 - 0.4861) \\ &\approx 0.0278 \end{aligned}$$

となる。

この値は 0.05 より小さいが、0.01 より大きい。

したがって、有意水準 5% では棄却し、有意水準 1% では棄却しない。

この違いは、どの程度の珍しさを「十分大きなずれ」と判断するかという事前基準の違いによる。

観測後に都合よく有意水準を変更してよいという意味ではない。

演習問題

練習問題 1

正規母集団から、母標準偏差 $\sigma = 6$ が既知である独立な標本を大きさ $n = 36$ だけ取り出した。
母平均について

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

を考える。

標本平均は $\bar{x} = 103$ であった。有意水準 5% の両側検定を行い、判断しなさい。また、

$$A(3) \approx 0.49865$$

を用いて p 値も求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$$

である。
したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{103 - 100}{1} = 3$$

となる。
両側検定では絶対値で判断する。
 $|z_{\text{obs}}| = 3$ であり、 $3 \geq 1.96$ を満たすため、5% 水準で H_0 を棄却する。
p 値は

$$\begin{aligned} p &= 2\left(\frac{1}{2} - A(3)\right) \\ &\approx 2(0.5 - 0.49865) \\ &\approx 0.00270 \end{aligned}$$

である。
したがって、この有意水準 5% では、母平均が 100 と異なるを考える十分な証拠がある。

練習問題 2

正規母集団から、母標準偏差 $\sigma = 4$ が既知である独立な標本を大きさ $n = 16$ だけ取り出した。
母平均について

$$H_0 : \mu = 20$$

$$H_1 : \mu \neq 20$$

を考える。
標本平均は $\bar{x} = 19$ であった。有意水準 5% の両側検定を行い、判断しなさい。

練習問題 2 の解答・解説

標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1$$

である。
したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{19 - 20}{1} = -1$$

となる。
両側検定では符号ではなく絶対値を見る。
 $|z_{\text{obs}}| = |-1| = 1$ である。
これは $1 < 1.96$ なので、 H_0 は棄却しない。
したがって、この有意水準 5% では、母平均が 20 と異なるという十分な証拠がない。

練習問題 3

正規母集団から、母標準偏差 $\sigma = 8$ が既知である独立な標本を大きさ $n = 64$ だけ取り出した。母平均について

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

を考える。

標本平均は $\bar{x} = 97.5$ であった。

有意水準 5% と 1% の両方で両側検定を行い、判断を比較しなさい。

練習問題 3 の解答・解説

標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$$

である。

したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{97.5 - 100}{1} = -2.5$$

となる。

絶対値を取ると、 $|z_{\text{obs}}| = 2.5$ である。

5% 水準では、 $2.5 \geq 1.96$ なので、 H_0 を棄却する。

一方、1% 水準では、 $2.5 < 2.58$ なので、 H_0 は棄却しない。

したがって、有意水準によって判断が変化する。

これは、観測後に都合のよい基準を選んでよいという意味ではない。有意水準は検定を行う前に決めておく必要がある。

練習問題 4

正規母集団から、母標準偏差 $\sigma = 10$ が既知である独立な標本を大きさ $n = 100$ だけ取り出した。母平均について

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu \neq 50$$

を考える。

標本平均は $\bar{x} = 51.96$ であった。

本講の判定基準に従い、有意水準 5% の両側検定で判断しなさい。

練習問題 4 の解答・解説

標準誤差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

である。

したがって、

$$z_{\text{obs}} = \frac{51.96 - 50}{1} = 1.96$$

となる。

本講では等号を棄却側に含めるため、 $|z_{\text{obs}}| = 1.96 \geq 1.96$ である。

したがって、5% 水準で H_0 を棄却する。

ただし、本講の臨界値は丸めた値であり、p 値そのものが常に丸め値であるという意味ではない。p 値を近似計算した場合には、その丸め誤差も含めて境界付近の判断に注意する必要がある。

練習問題 5

正規母集団から、母標準偏差 $\sigma = 6$ が既知である独立な標本を大きさ $n = 9$ だけ取り出した。
母平均について

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu \neq 10$$

を考える。

標本平均は $\bar{x} = 13$ であった。

ある人が標準誤差を $\frac{\sigma}{n}$ として計算した。この誤りを説明し、正しい計算で 5% の両側検定を行いなさい。

練習問題 5 の解答・解説

標本平均 $\bar{X}$ の分散は

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

である。

標準誤差は分散の正の平方根なので、

$$\sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

したがって、標準誤差を $\frac{\sigma}{n}$ とするのは誤りである。

この問題では、

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$$

が正しい標準誤差である。

誤って

$$\frac{\sigma}{n} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

としてしまうと、

$$z_{\text{obs}} = \frac{13 - 10}{\frac{2}{3}} = 4.5$$

元の差 $\bar{x} - \mu_0 = 3$ 自体が変わるわけではなく、標準誤差を誤って小さく見積もることで、標準化したずれの大きさを過大評価することになる。

正しい計算では、

$$z_{\text{obs}} = \frac{13 - 10}{2} = 1.5$$

である。

したがって、 $|z_{\text{obs}}| = 1.5 < 1.96$ より、 H_0 は棄却しない。

この有意水準 5% では、母平均が 10 と異なるという十分な証拠がない。

練習問題 6

次の 3 つの主張について、正しいか誤りかを判断し、理由を説明しなさい。

- (1) 有意水準 5% とは、 H_0 が正しい確率が 5% であるという意味である。
- (2) H_0 を棄却すれば、 H_1 が確実に正しいことが証明された。
- (3) H_0 を棄却しなければ、 H_0 が正しいことが証明された。

練習問題 6 の解答・解説

(1) 誤りである。

有意水準とは、 H_0 が正しいときに誤って H_0 を棄却する割合を制御するための事前基準である。 H_0 が正しい確率を表しているわけではない。

(2) 誤りである。

H_0 を棄却するとは、観測結果が H_0 の下では珍しいと判断したという意味である。 H_1 が確実に正しいと証明したわけではない。

(3) 誤りである。

H_0 を棄却しないとは、 H_0 と矛盾する十分な証拠が得られなかったという意味である。 H_0 が正しいことを証明したり、採択したりする意味ではない。

練習問題 7

次の 2 つの主張について、正しいか誤りかを判断し、理由を説明しなさい。

- (1) 両側検定の p 値が 0.03 であるとは、 H_0 が正しい確率が 3% であるという意味である。
- (2) 統計的に有意差があれば、実用上も必ず大きな意味がある。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 誤りである。

p 値とは、 H_0 が正しいと仮定したとき、観測された結果以上に極端な結果が得られる確率である。したがって、 H_0 が正しい確率を表しているわけではない。

(2) 誤りである。

統計的有意性は、 H_0 が正しいと仮定したモデルの下で、観測結果以上に極端なずれが起こる珍しさに基づく判断である。

一方、実用上の重要性は、差の大きさや利用目的によって決まる。

そのため、統計的に有意であっても、実用上は小さな差である場合がある。

練習問題 8

ある研究者が、最初は事前に決めた両側検定を行う予定であった。

しかし、観測結果を見ると正の方向のずれがあったため、正の方向だけを見る片側検定へ変更した。さらに、有意水準も 1% から 5% へ変更して棄却した。

この手続きをどのように評価すべきか説明しなさい。

練習問題 8 の解答・解説

この手続きは適切ではない。

仮説検定では、検定の方向や有意水準はデータを見る前に決めておく必要がある。

観測後に、自分に有利になるように両側検定を片側検定へ変更したり、有意水準を変更したりすると、偶然大きなずれが出た場合でも棄却しやすくなり、誤った判断につながる。

したがって、事前に

- ・ 帰無仮説と対立仮説
- ・ 両側か片側か
- ・ 有意水準

を決め、その基準に従って判断することが重要である。