第 191 講 対数関数の微分

学習目標

この講では、対数関数の微分公式を導き、自然対数と一般の底を持つ対数を正しく区別して扱えるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 対数関数の微分可能性を差商から説明できる。
- $y = \log x$ の導関数を求められる。
- $y = \log_a x$ の導関数を自然対数を用いて表せる。
- 合成関数の微分法を用いて対数関数を含む関数を微分できる。

対数関数の条件

底が a の対数を $\log_a x$ と表す。
このとき、底について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ が必要であり、真数について $x > 0$ が必要である。
底が自然対数の底 e である場合、$\log_e x$ を $\log x$ と表す。

自然対数を微分する考え方

自然対数は指数関数の逆関数として定められる。第 190 講で扱ったように、$e > 1$ は指数の基本極限を満たす特別な底であり、$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ となる。また、指数関数 $y = e^x$ の導関数は $(e^x)' = e^x$ である。
対数関数の微分では、対数関数がすでに微分可能であると仮定して逆関数の公式を使うのではなく、差商そのものを調べる。固定した $x > 0$ に対して、h が 0 に近づくときの差商の極限を求めることで、$\log x$ の微分可能性と導関数を同時に示す。
今回の証明では、対数の連続性、単射性、指数法則を用いて差商を指数関数の基本極限へ変形する。これにより、対数関数の導関数が自然に導かれる。

©ミライコーチング

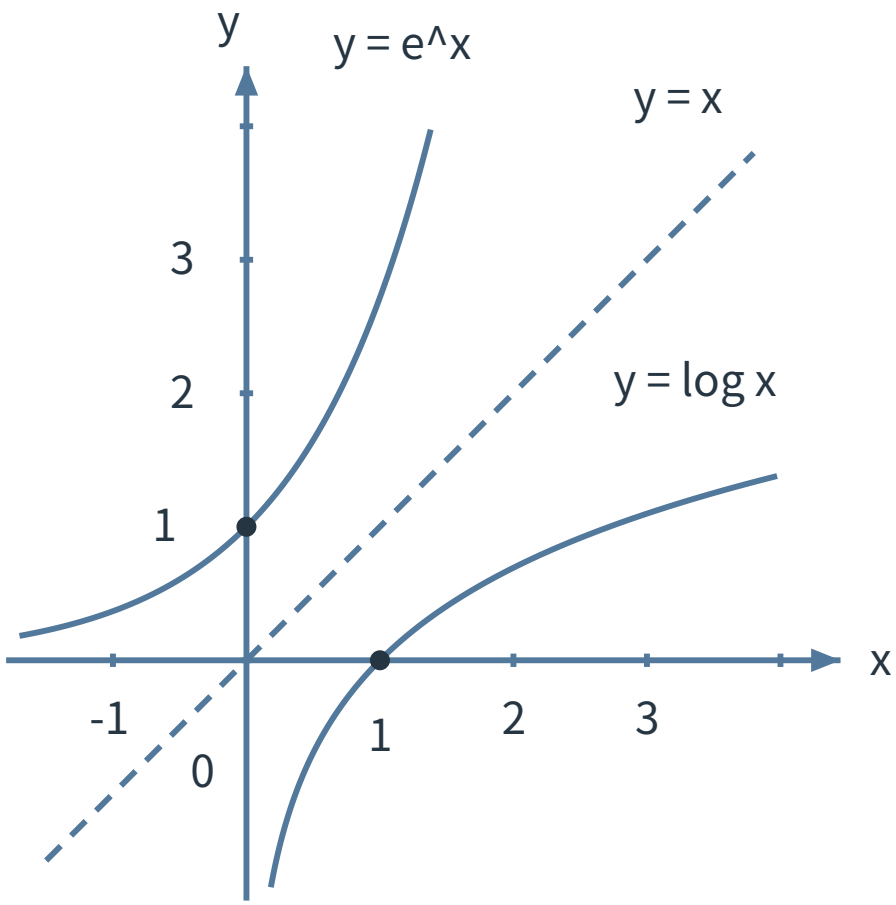

図 1　$y = e^x$ と $y = \log x$ は $y = x$ に関して対称な曲線であり、入力と出力を交換する関係を表す。

自然対数の導関数の証明

$x > 0$ を固定する。$h \neq 0$ かつ $x + h > 0$ とし、$k = \log(x + h) - \log x$ とおく。対数関数の既習の連続性より、$h \to 0$ のとき $k \to 0$ である。また、対数関数は単射であるため、$h \neq 0$ ならば $k \neq 0$ である。指数法則から $h = x\left(e^k - 1\right)$ が得られる。さらに、指数の基本極限 $\lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k} = 1$ の逆数の極限が 1 であることを用いる。
この関係から、差商を次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} &= \frac{k}{h}\\ &= \frac{k}{x(e^k-1)}\\ &= \frac{1}{x}\frac{k}{e^k-1}\\ &\to \frac{1}{x}\end{aligned}$$

差商の有限極限が存在するので、$x>0$で$\log x$は微分可能であり、導関数は $(\log x)' = \frac{1}{x}$ である。

自然対数の微分公式

$x>0$ において、$(\log x)' = \frac{1}{x}$ である。
この公式では、関数の値と接線の傾きを区別することが重要である。例えば $x=1$ では $\log 1 = 0$ であるが、接線の傾きは $\frac{1}{1}=1$ である。

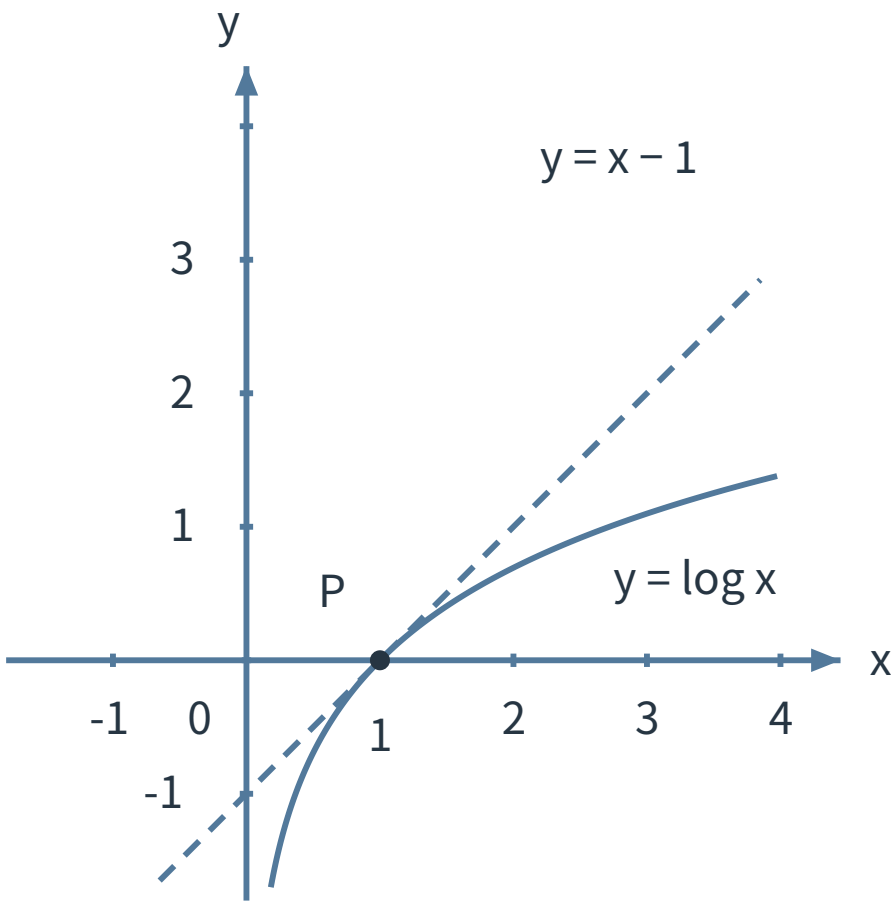

図 2　$y = \log x$ は点 $(1, 0)$ で接線 $y = x - 1$ を持ち、その傾きは 1 である。

一般の底を持つ対数の微分

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ を満たす定数 a を考える。また、真数について $x > 0$ とする。一般の底を持つ対数は、底の変換公式により $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ と表せる。
$a \neq 1$ であるため、$\log a \neq 0$ である。したがって、$\log a$ は定数として扱うことができ、定数倍の微分を用いて $(\log_a x)' = \frac{1}{\log a}(\log x)'$ と考えられる。
自然対数の微分公式より、$a > 0$ かつ $a \neq 1$、$x > 0$ において $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ である。なお、$0 < a < 1$ の場合は $\log a < 0$ となるため、導関数の符号にも注意する必要がある。

真数条件の確認

対数関数では、微分する前に真数条件を確認する必要がある。
例えば $\log(2x + 1)$ では、$2x + 1 > 0$ が必要であるため、定義域は $x > -\frac{1}{2}$ となる。
また、底を含む場合は底の条件 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ も確認する。

合成された対数関数の微分

$f(x)$ が対象となる開区間で微分可能であり、その範囲で $f(x)>0$ を満たすとする。このとき、$y=\log f(x)$ は対数関数と関数 $f(x)$ を組み合わせた合成関数である。
外側の関数 $\log u$ の微分は $\frac{1}{u}$ であり、内側の関数 $f(x)$ の微分は $f'(x)$ である。したがって、合成関数の微分法により、$\frac{d}{dx}\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ となる。
内側の微分を掛ける理由は、x の変化によって真数 $f(x)$ がどのような速さで変化するかを反映する必要があるためである。対数の微分では、真数条件 $f(x)>0$ の確認と内側の微分を忘れないことが重要である。

例題 1

$y=\log x$ の導関数を求めよ。また、定義域を答えよ。

例題 1 の解答・解説

自然対数の微分公式を用いる。
$x>0$ において、$(\log x)'=\frac{1}{x}$ である。
したがって、$y=\log x$ の導関数は $y'=\frac{1}{x}$ であり、定義域は $x>0$ である。

例題 2

$y=\log_3 x$ の導関数を求めよ。また、定義域を答えよ。

例題 2 の解答・解説

底の変換公式を用いる。
$\log_3 x=\frac{\log x}{\log 3}$ である。
ここで、$\log 3$ は定数であり、$3>0$ かつ $3\neq 1$ であるため利用できる。
したがって、$y'=\frac{1}{x\log 3}$ である。
また、真数条件より $x>0$ であるから、定義域は $x>0$ である。

例題 3

$y=\log(2x+1)$ の導関数を求めよ。また、定義域を答えよ。

例題 3 の解答・解説

まず真数条件を確認する。
$2x+1>0$ より、定義域は $x>-\frac{1}{2}$ である。
次に合成関数の微分を用いる。
外側の関数 $\log u$ の微分は $\frac{1}{u}$、内側の関数 $2x+1$ の微分は 2 である。
したがって、$y'=\frac{1}{2x+1}\cdot 2=\frac{2}{2x+1}$ である。
この結果から、内側の微分によって傾きが変化することが分かる。

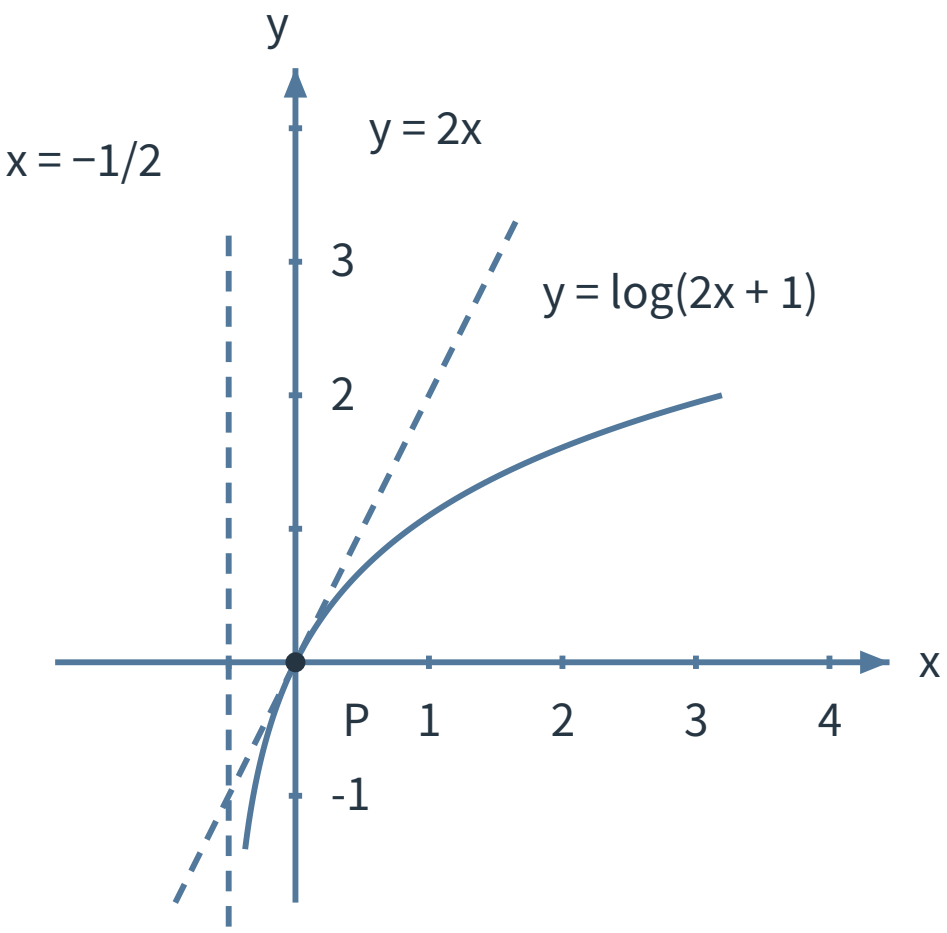

図 3　$y=\log(2x+1)$ は定義域 $x>-\frac{1}{2}$ で、点 $(0,0)$ における接線 $y=2x$ の傾きは 2 である。

演習問題

演習問題 1

$y=3\log x+2$ の導関数を求め、定義域を答えよ。

演習問題 2

$y=\log_{\frac{1}{5}} x$ の導関数を求め、定義域を答えよ。

演習問題 3

$y=\log(x^2+1)$ の導関数を求めよ。

演習問題 4

$y = \log(3x - 2)$ の導関数を求め、定義域を答えよ。

演習問題 5

$y = x \log x$ の導関数を求め、定義域を答えよ。

演習問題 6

$y = \frac{\log x}{x}$ の導関数を求め、定義域を答えよ。

演習問題 7

$y = \log x$ について、$x = e$ における関数値と微分係数をそれぞれ求めよ。

演習問題 8

$y = \log(4x + 3)$ の $x = 0$ における接線の傾きを求めよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

定数倍と定数項の微分を用いる。
$x > 0$ において、$(\log x)' = \frac{1}{x}$ である。また、定数倍の微分では係数をそのまま掛け、定数項の微分は 0 となる。
したがって、$y' = 3 \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{3}{x}$ である。
真数条件より、定義域は $x > 0$ である。

演習問題 2 の解答・解説

底 $\frac{1}{5}$ は 0 と 1 の間にあるため、対数の底として条件を満たす。さらに、対数の性質より $\log\left(\frac{1}{5}\right) = -\log 5$ である。
底変換を用いると、$\log_{\frac{1}{5}} x = -\frac{\log x}{\log 5}$ である。
ここで、$-\frac{1}{\log 5}$ は定数であり、$(\log x)' = \frac{1}{x}$ であるため、$y' = -\frac{1}{x \log 5}$ である。
真数条件より、定義域は $x > 0$ である。

演習問題 3 の解答・解説

真数を $f(x) = x^2 + 1$ とおく。
$x^2 + 1 > 0$ はすべての実数 x で成り立つため、定義域はすべての実数である。
合成関数の微分より、$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ である。
$f'(x) = 2x$ であるから、$y' = \frac{2x}{x^2+1}$ となる。

演習問題 4 の解答・解説

真数条件を確認する。
$3x-2>0$ より、定義域は $x>\frac{2}{3}$ である。
真数を $f(x)=3x-2$ とすると、$f'(x)=3$ である。
したがって、合成関数の微分より、$y'=\frac{3}{3x-2}$ となる。

演習問題 5 の解答・解説

$x>0$ が定義域であるため、この範囲で積の微分法を用いる。
積の微分法より、$y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}$ である。
したがって、$y'=\log x+1$ となる。

演習問題 6 の解答・解説

$x>0$ が定義域である。分子を $u=\log x$、分母を $v=x$ とおくと、$u'=\frac{1}{x}$、$v'=1$ である。
商の微分法により、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1-\log x}{x^2} \end{aligned}$$

したがって、導関数は $y'=\frac{1-\log x}{x^2}$ であり、定義域は $x>0$ である。

演習問題 7 の解答・解説

関数値と微分係数は異なる量であるため、それぞれを分けて考える。
$e>0$ であるため、$x=e$ は定義域内である。関数値は $\log e=1$ より 1 である。
一方、$(\log x)'=\frac{1}{x}$ であるから、$x=e$ における微分係数は $\frac{1}{e}$ である。
したがって、関数値は 1、微分係数は $\frac{1}{e}$ である。

演習問題 8 の解答・解説

真数条件を確認する。
$4x+3>0$ より、定義域は $x>-\frac{3}{4}$ である。
真数を $f(x)=4x+3$ とすると、$f'(x)=4$ である。
したがって、$y'=\frac{4}{4x+3}$ となる。
$x=0$ では、傾きは $y'(0)=\frac{4}{3}$ である。
よって、求める接線の傾きは $\frac{4}{3}$ である。

©ミライコーチング