

第 97 講 軌跡とは何か

学習目標

- ・ 軌跡を「ある条件を満たす点すべての集まり」として説明できる。
- ・ 点 $P(x, y)$ をおいて、条件を方程式に直し、軌跡を求めることができる。
- ・ 方程式が表す図形から、もとの条件を満たすことを確かめることができる。

1. 軌跡とは何か

軌跡

ある条件を満たす点をすべて集めてできる図形を、その条件を満たす点の軌跡という。

軌跡では『すべて』が重要である

軌跡を考えるときに大切なのは、条件を満たす点を 1 つ見つけることではなく、条件を満たす点をもれなく集めることである。

したがって、軌跡を求めるとは、次の 2 つをそろえて確かめることである。

- ・ 条件を満たす点 $P(x, y)$ は、ある方程式を満たす。
- ・ その方程式を満たすすべての点は、もとの条件も満たす。

この往復ができてはじめて、方程式と図形が正しく対応したといえるのである。

軌跡を求める基本手順

1. 動く点を $P(x, y)$ とおき、与えられた条件を x, y の式に直す。
2. 得られた方程式がどの図形を表すかを考える。
3. その図形上の点が、逆にもとの条件を満たすことを確かめる。

2. 条件から軌跡を求める基本例

2-1. 固定点からの距離が一定の点の軌跡

点 $O(0, 0)$ からの距離が 3 である点の軌跡

点 $P(x, y)$ が点 $O(0, 0)$ からの距離 3 を満たすとする。距離の公式より $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ であるから、条件 $OP = 3$ は次の式と同値である。

$$\begin{aligned} OP = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

逆に、 $x^2 + y^2 = 9$ を満たす点 $P(x, y)$ については $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ となるので、たしかに $OP = 3$ である。

したがって、点 $O(0, 0)$ からの距離が 3 である点の軌跡は、方程式 $x^2 + y^2 = 9$ で表される円である。中心は $O(0, 0)$ 、半径は 3 である。

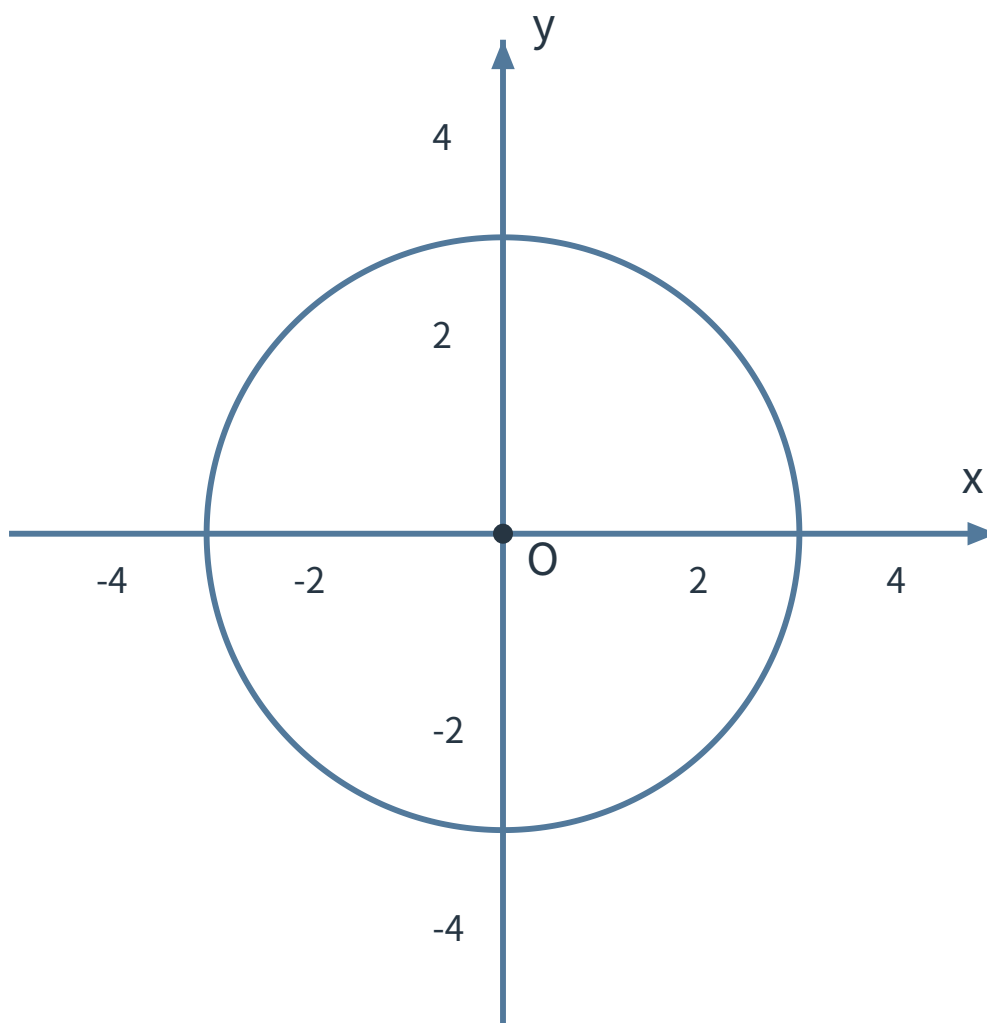


図1 点 $O(0,0)$ から距離 3 の点の軌跡 $x^2+y^2=9$

2-2.2 点から等距離の点の軌跡

点 $A(-2,0)$ 、 $B(2,0)$ から等距離の点の軌跡

点 $P(x,y)$ が点 $A(-2,0)$ と点 $B(2,0)$ から等距離にあるとする。距離は非負なので、 $PA = PB$ は $PA^2 = PB^2$ と同値である。距離の公式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + y^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ 8x &= 0\end{aligned}$$

となる。よって $x=0$ である。

逆に、 $x=0$ を満たす点 $P(0,y)$ をとると、

$$\begin{aligned}PA^2 &= (0+2)^2 + y^2 = 4 + y^2 \\ PB^2 &= (0-2)^2 + y^2 = 4 + y^2\end{aligned}$$

となるので、 $PA^2 = PB^2$ であり、したがって $PA = PB$ である。

よって、点 $A(-2, 0)$ と点 $B(2, 0)$ から等距離の点の軌跡は、方程式 $x = 0$ で表される直線である。この直線は線分 AB の垂直二等分線になっている。

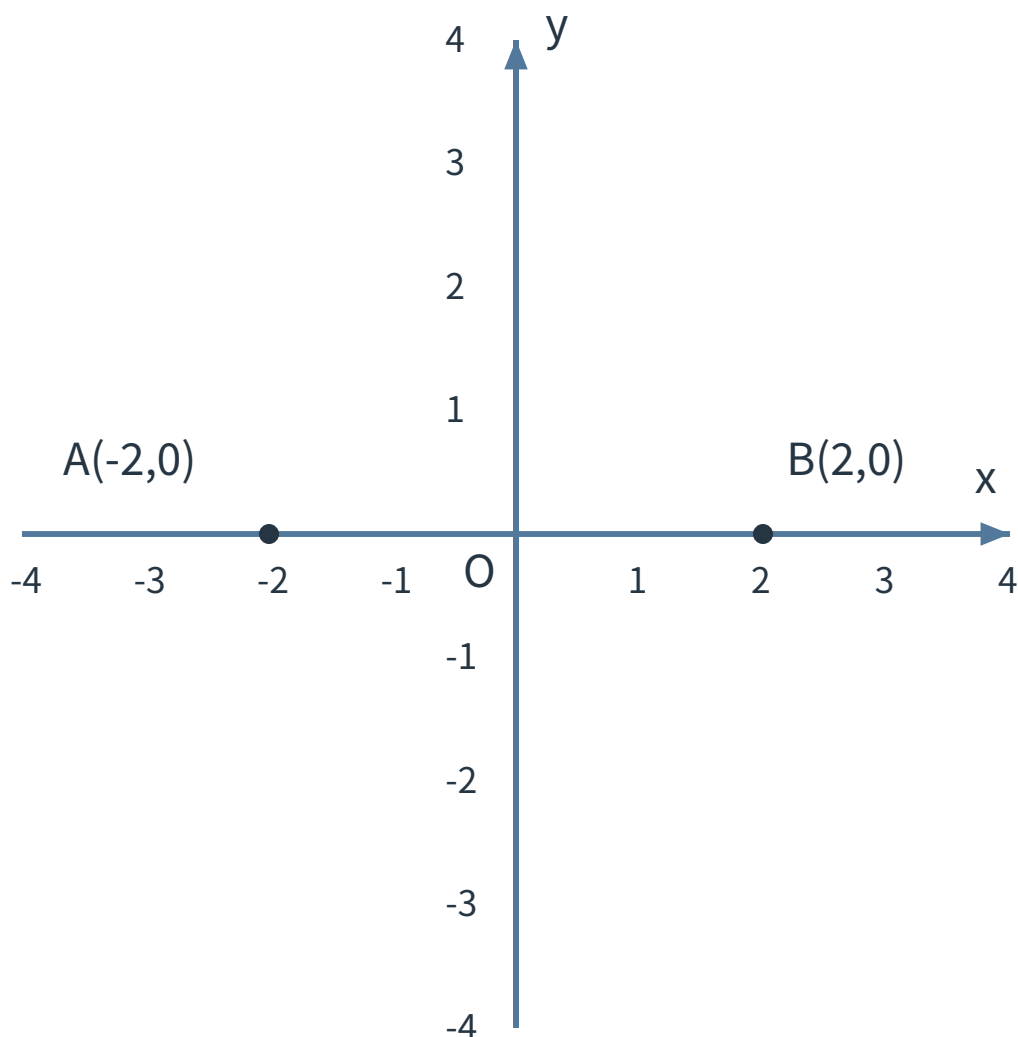


図2 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ から等距離の点の軌跡 $x=0$

式を作っただけで終えない

軌跡では、条件から方程式を作るだけでは不十分である。得られた方程式を満たすすべての点
が、逆にもとの条件を満たすことを確かめる必要がある。
とくに、両辺を二乗する変形や移項を含むときは、条件を広げすぎていないかを確認することが
重要である。

3. 例題

例題 1

点 $A(1, -1)$ からの距離が 2 である点 P の軌跡を求めよ。

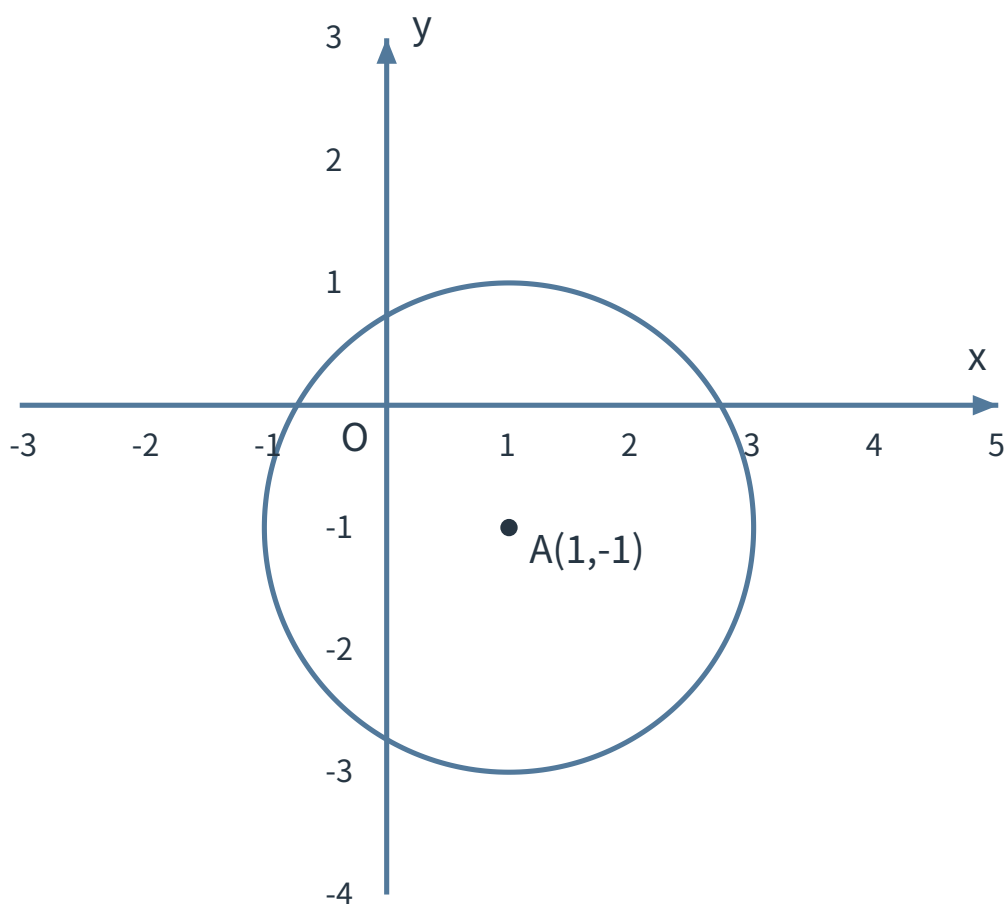


図3 例題1の軌跡

例題1の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。条件は $AP = 2$ である。

距離の公式より $AP = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ であるから、

$$AP = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

逆に、 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ を満たす点は、点 $A(1, -1)$ からの距離が2である。

したがって、求める軌跡は $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ で表される円である。中心は $(1, -1)$ 、半径は2である。

例題2

点 $C(0, -1)$ と点 $D(0, 3)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

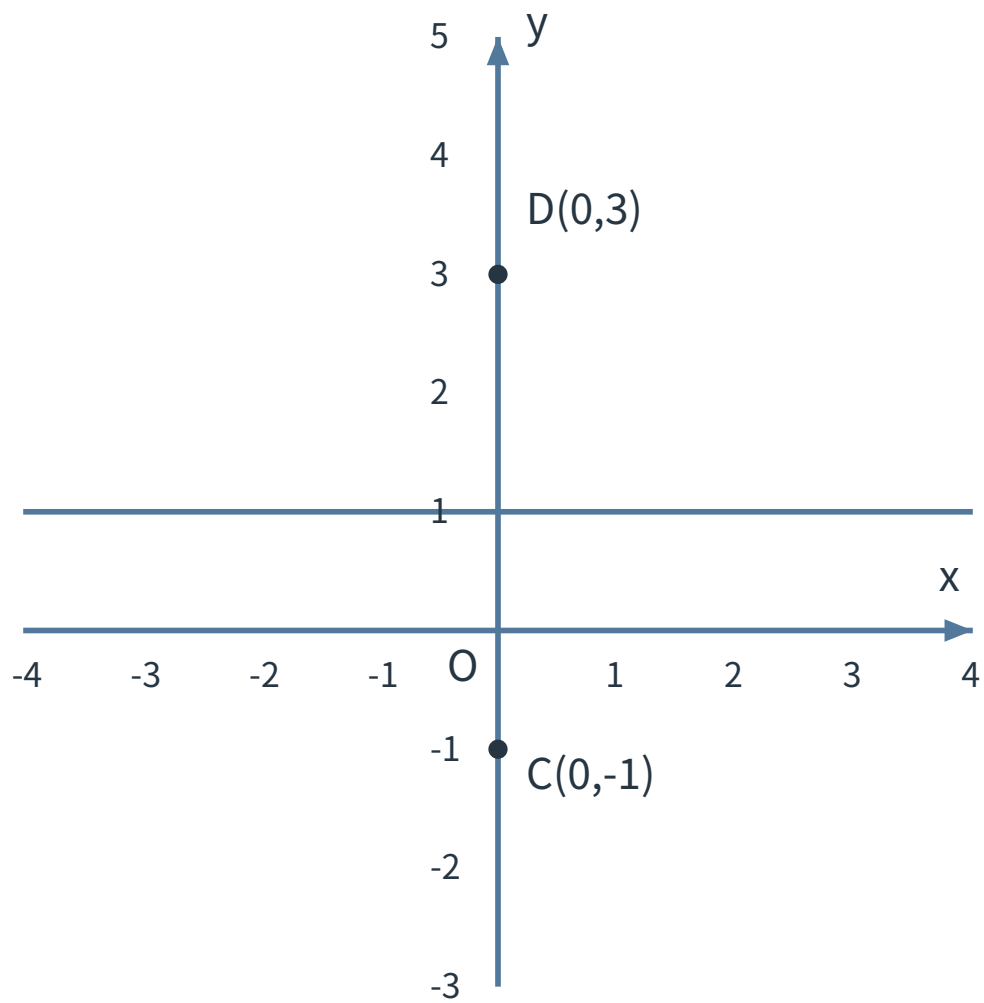


図4 例題2の軌跡

例題 2 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。条件は $PC = PD$ である。

距離は非負なので、 $PC = PD$ は $PC^2 = PD^2$ と同値である。距離の公式を代入し、両辺から x^2 を引くと、

$$(y + 1)^2 = (y - 3)^2$$

$$8y = 8$$

となる。よって $y = 1$ である。

逆に、 $y = 1$ を満たす点 $P(x, 1)$ については、

$$PC^2 = x^2 + (1 + 1)^2 = x^2 + 4$$

$$PD^2 = x^2 + (1 - 3)^2 = x^2 + 4$$

となるので、 $PC = PD$ である。

したがって、求める軌跡は $y = 1$ で表される直線である。この直線は線分 CD の垂直二等分線である。

4. 演習問題

演習 1

点 $O(0, 0)$ からの距離が 5 である点 P の軌跡を求めよ。

演習 2

点 $A(-3, 0)$ と点 $B(3, 0)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

演習 3

点 $C(2, 1)$ からの距離が 4 である点 P の軌跡を求めよ。

演習 4

点 $A(0, 2)$ と点 $B(0, 6)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

演習 5

点 $(0, 3)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(-3, 0)$ のうち、軌跡 $x^2 + y^2 = 9$ 上にある点をすべて答えよ。

演習 6

方程式 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ が表す軌跡を、固定点からの距離を用いて説明せよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとると、条件は $OP = 5$ である。
距離の公式より $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}OP = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \\&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25\end{aligned}$$

逆に、 $x^2 + y^2 = 25$ を満たす点は点 $O(0, 0)$ からの距離が 5 である。
したがって、求める軌跡は $x^2 + y^2 = 25$ で表される円である。中心は $(0, 0)$ 、半径は 5 である。

演習 2 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとると、条件は $PA = PB$ である。
距離は非負なので、 $PA = PB$ は $PA^2 = PB^2$ と同値である。距離の公式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 + y^2 &= (x - 3)^2 + y^2 \\12x &= 0\end{aligned}$$

となる。よって $x = 0$ である。
逆に、 $x = 0$ を満たす点では $PA^2 = PB^2$ となるので、 $PA = PB$ である。
したがって、求める軌跡は $x = 0$ で表される直線である。

演習 3 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとると、条件は $CP = 4$ である。
距離の公式より $CP = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}CP = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = 4 \\&\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16\end{aligned}$$

逆に、 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ を満たす点は点 $C(2, 1)$ からの距離が 4 である。
したがって、求める軌跡は $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ で表される円である。

演習 4 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとると、条件は $PA = PB$ である。
距離は非負なので、 $PA = PB$ は $PA^2 = PB^2$ と同値である。距離の公式を代入し、両辺から x^2 を引くと、

$$\begin{aligned}(y - 2)^2 &= (y - 6)^2 \\8y &= 32\end{aligned}$$

となる。よって $y = 4$ である。
逆に、 $y = 4$ を満たす点では $PA^2 = PB^2$ となるので、 $PA = PB$ である。
したがって、求める軌跡は $y = 4$ で表される直線である。

演習 5 の解答・解説

各点が $x^2 + y^2 = 9$ を満たすかどうかを調べる。
・点 $(0, 3)$ では $0^2 + 3^2 = 9$ であるから、軌跡上にある。
・点 $(2, 2)$ では $2^2 + 2^2 = 8$ であるから、軌跡上にない。

・ 点 $(-3, 0)$ では $(-3)^2 + 0^2 = 9$ であるから、軌跡上にある。

次の図では $A = (0, 3)$ 、 $B = (2, 2)$ 、 $C = (-3, 0)$ とする。 A, C は円周上、 B は円の内側にあることを確認できる。

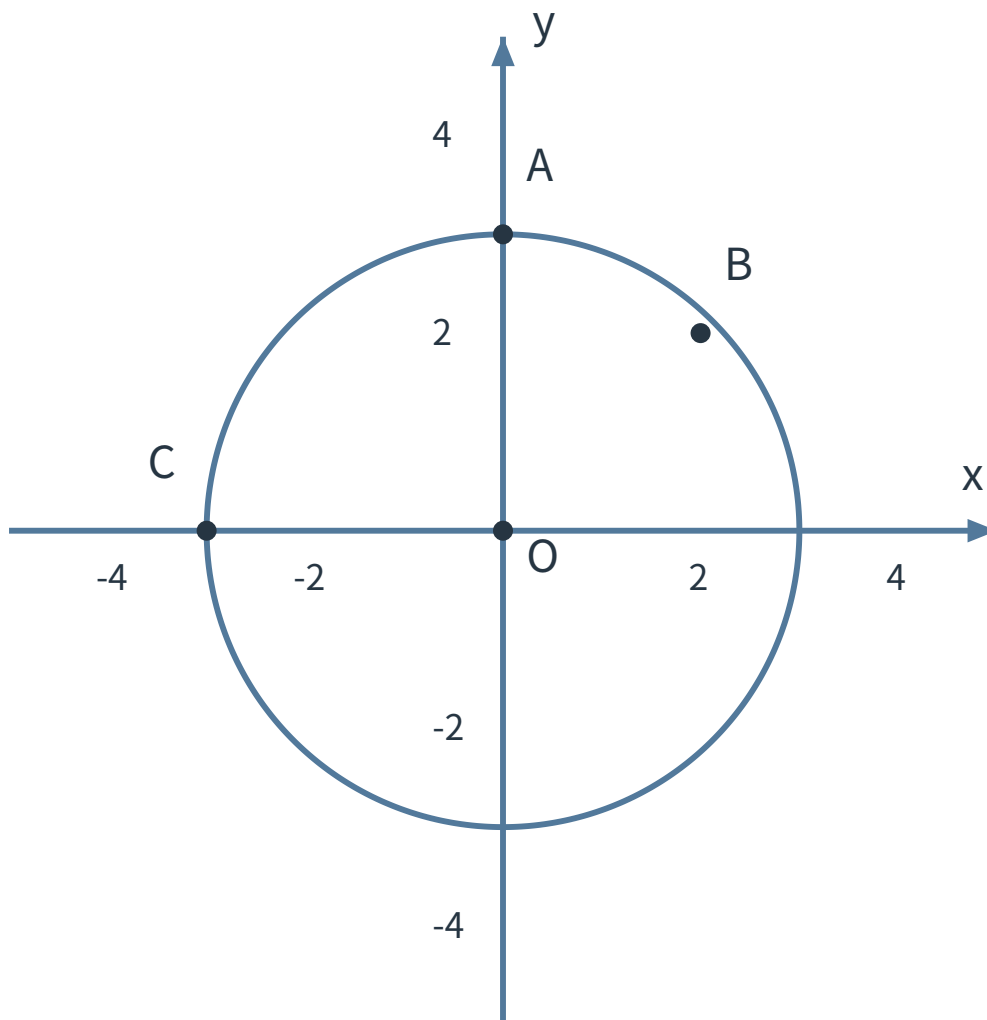


図5 円周上の2点と円の内側の1点

したがって、軌跡 $x^2 + y^2 = 9$ 上にあるのは $(0, 3)$ と $(-3, 0)$ である。

演習 6 の解答・解説

方程式 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ は、中心が $(2, -1)$ 、半径が 3 の円を表している。

したがって、この方程式が表す軌跡は、固定点 $(2, -1)$ からの距離が 3 である点の軌跡である。

実際、点 $P(x, y)$ について距離の公式を用いると、点 $(2, -1)$ からの距離は $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$ であるから、これが 3 であることと方程式 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ を満たすことは同値である。