

第 119 講 指数方程式・指数不等式

学習目標

この講では、指数関数の増減を利用して指数を含む方程式・不等式を解けるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 指数関数の性質から、指数を比較できる条件を判断できる。
- ・ 底をそろえて指数方程式を解くことができる。
- ・ 底が 1 より大きい場合と、0 より大きく 1 より小さい場合で、不等式の向きが変化する理由を説明できる。
- ・ $t = a^x$ の置換を使う問題で、置換後の条件 $t > 0$ を確認して解を選べる。

指数方程式・指数不等式を考える理由

指数関数 $y = a^x$ のグラフでは、底 a によって増え方が変わる。

$a > 1$ のときは右上がり、 $0 < a < 1$ のときは右下がりになる。この違いが、指数を比較するときの不等号の向きを決める。

指数方程式や指数不等式では、単純に指数だけを見るのではなく、まず「同じ底にそろえられるか」を考える。その後、底の条件を確認して指数を比較することが基本方針である。

指数の比較ができる条件

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ とし、 u, v を実数とする。

このとき、指数関数 $y = a^x$ は厳密単調である。つまり、 $a > 1$ のときは常に増加し、 $0 < a < 1$ のときは常に減少する。

厳密単調な関数では、異なる入力と同じ出力になることはない。そのため、 $a^u = a^v$ と $u = v$ は同値である。

これは、指数関数のグラフ上で異なる x 座標に同じ高さの点が現れないことに対応している。

一方、 $a = 1$ の場合は、 $1^x = 1$ となり、指数を変えても値が変化しない定数関数になる。そのため、指数の比較に必要な厳密単調性をもたず、この同値関係を利用することはできない。

指数方程式を解く判断軸

指数方程式では、次の流れで考える。

1. 底をそろえる。
2. 底が $a > 0$ 、 $a \neq 1$ を満たすか確認する。
3. 指数を比較する。
4. 得られた解を元の式に戻して確認する。

指数関数の値は常に正であることから、右辺が 0 以下の方程式は解をもたないと判断できる。ただし、これは $a^{f(x)} = c$ のように左辺が単独の指数式である場合に限る。

底が $a > 0$ 、指数 $f(x)$ が定義域内の実数であり、 $c \leq 0$ のとき、 $a^{f(x)} = c$ を満たす実数解は存在しない。

一方で、 $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ のように複数の指数項の差を含む式では、式全体が正であるとは限らない。この結論をそのまま一般化してはいけない。

指数不等式の向き

$a > 1$ のとき、指数関数 $y = a^x$ は増加するため、 $a^u < a^v$ と $u < v$ は同値である。
一方、 $0 < a < 1$ のとき、指数関数 $y = a^x$ は減少するため、 $a^u < a^v$ と $u > v$ は同値になる。
これは、右下がりのグラフでは左側の指数ほど高い値をとるためである。

不等式で注意すること

底が 0 と 1 の間にある場合、不等号の向きを逆にする必要がある。
また、等号を含む不等式では境界の値を含む。例えば $x \leq c$ のような形になった場合、数直線では c を含む閉じた端点で表す。
底が 0 や負の数の場合には、指数比較の性質を無条件に使ってはいけない。

例題 1

$2^{2x-1} = 8$ を解きなさい。

例題 1 の解答・解説

右辺の 8 を底 2 の累乗に直す。

$$8 = 2^3$$

したがって、 $2^{2x-1} = 2^3$ となる。

底 2 は $2 > 0$ 、 $2 \neq 1$ を満たすため、指数を比較できる。

$$2x - 1 = 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

得られた値を元の式で確認すると、 $2^{2 \cdot 2 - 1} = 2^3 = 8$ となり、条件を満たす。

したがって、解は $x = 2$ である。

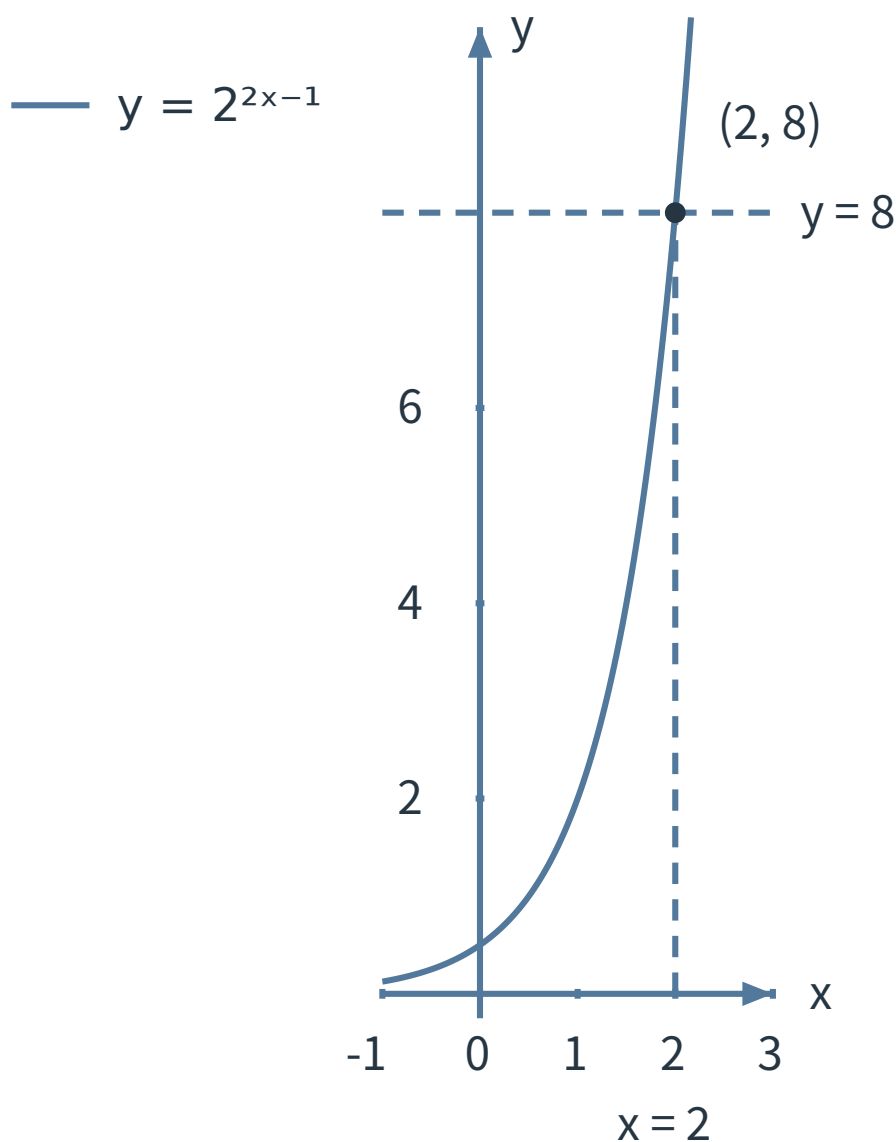


図1 実線 $y = 2^{2x-1}$ と破線 $y = 8$ の交点は $(2, 8)$ 。縦の補助線から方程式の解は $x = 2$ と読める。定義域は実数全体で、曲線は $-1 \leq x \leq 3$ の表示窓で切り取った一部。端には点を付けない。

例題 2

$(\frac{1}{3})^{2x-1} \geq 9$ を解きなさい。

例題 2 の解答・解説

右辺を底 $(\frac{1}{3})$ の累乗にそろえる。

$$9 = (\frac{1}{3})^{-2}$$

よって、 $(\frac{1}{3})^{2x-1} \geq (\frac{1}{3})^{-2}$ となる。

ここで、底 $(\frac{1}{3})$ は $0 < \frac{1}{3} < 1$ を満たす。

この場合、指数関数は減少するため、不等号の向きが逆になる。

したがって、 $2x - 1 \leq -2$ となる。

これを解くと、次のように計算する。

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

等号を含む不等式なので、境界 $x = -\frac{1}{2}$ を含む。
したがって、解は $x \leq -\frac{1}{2}$ である。

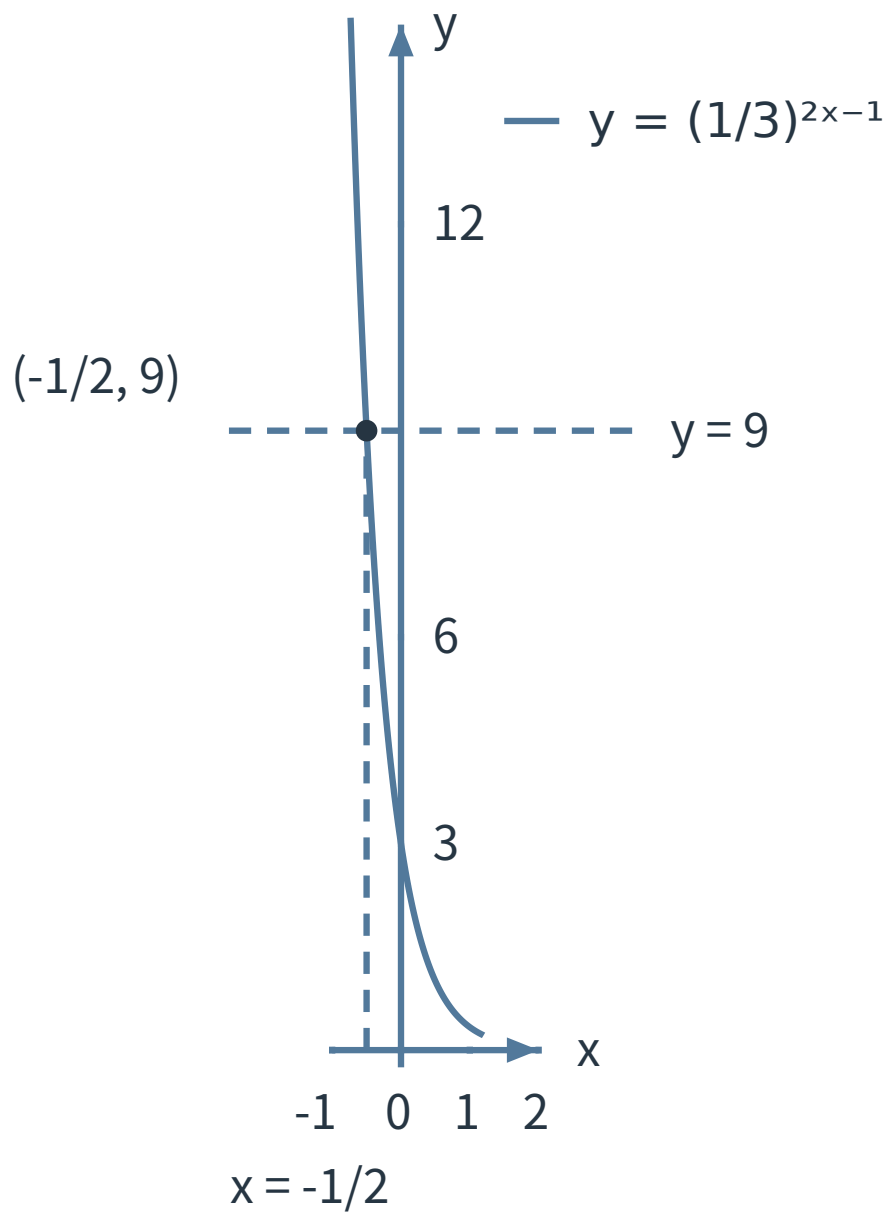


図2 実線 $y = (1/3)^{2x-1}$ は減少する。破線 $y = 9$ との交点 $(-\frac{1}{2}, 9)$ を含め、その左側で $y \geq 9$ 、したがって $x \leq -\frac{1}{2}$ 。黒丸は等号を含む境界。定義域は実数全体で、曲線はその一部を示す。

例題 3

$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ を解きなさい。

例題 3 の解答・解説

4^x を 2^x の式として表す。

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$$

ここで、 $t = 2^x$ とおく。

指数関数の値は常に正なので、 $t > 0$ である。

すると、方程式は $t^2 - 3t - 4 = 0$ となる。

因数分解すると、 $(t - 4)(t + 1) = 0$ より、 $t = 4$ 、 $t = -1$ を得る。

しかし、 $t = 2^x$ であるため $t > 0$ でなければならない。

したがって、 $t = -1$ は不適であり、 $t = 4$ を採用する。

元へ戻すと、 $2^x = 4$ である。

$$4 = 2^2 \text{ より、} 2^x = 2^2 \text{ となる。}$$

底 2 は指数比較できる条件を満たすため、 $x = 2$ である。

したがって、解は $x = 2$ である。

元の式に戻して確認すると、 $4^2 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$ となる。

したがって、 $x = 2$ は元の方程式 $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ を満たす。

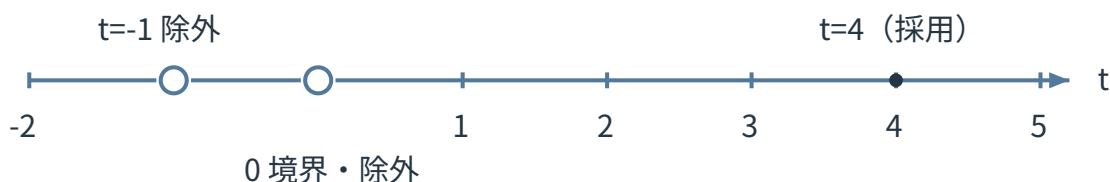


図3 tの数直線。置換 $t = 2^x$ の条件は $t > 0$ (0 より右側全体)。白丸の $t = -1$ は方程式の候補だが条件を満たさず除外。0 の白丸は開いた境界で、方程式の候補ではない。黒丸の $t = 4$ だけを採用する。

演習問題

演習 1

$$3^{x+1} = 27 \text{ を解きなさい。}$$

演習 2

$$5^{2x-3} = 125 \text{ を解きなさい。}$$

演習 3

$$2^{x+2} > 8 \text{ を解きなさい。}$$

演習 4

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq 4 \text{ を解きなさい。}$$

演習 5

$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ を解きなさい。

演習 6

$7^x = -2$ を満たす実数 x が存在するか答えなさい。

演習 7

次の考え方の誤りを訂正し、正しい判断を説明しなさい。

$1^x = 1^2$ だから、 $x = 2$ である。

演習 8

整数 x について、 $(-2)^x = -8$ を解きなさい。

また、負の底では本講で扱った実数全体での指数比較の定理をそのまま適用できない理由を説明しなさい。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

右辺を底 3 の累乗にそろえる。

$$27 = 3^3$$

したがって、 $3^{x+1} = 3^3$ となる。

底 3 は $3 > 0$ 、 $3 \neq 1$ を満たすため、指数を比較できる。

$x + 1 = 3$ より、 $x = 2$ である。

元の式に戻すと、 $3^{2+1} = 3^3 = 27$ となり、条件を満たす。

したがって、解は $x = 2$ である。

演習 2 の解答・解説

右辺を底 5 の累乗に直す。

$$125 = 5^3$$

よって、 $5^{2x-3} = 5^3$ となる。

底 5 は指数比較できる条件を満たすため、 $2x - 3 = 3$ である。

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

元の式で確認すると、 $5^{2 \cdot 3 - 3} = 5^3 = 125$ となる。

したがって、解は $x = 3$ である。

演習 3 の解答・解説

右辺を底 2 の累乗にそろえる。

$$8 = 2^3$$

したがって、 $2^{x+2} > 2^3$ となる。

底 2 は 1 より大きいため、指数の大小はそのまま比較できる。

$x + 2 > 3$ より、 $x > 1$ である。

したがって、解は $x > 1$ である。

演習 4 の解答・解説

右辺を底 $(\frac{1}{2})$ の累乗にそろえる。

$$4 = (\frac{1}{2})^{-2}$$

よって、 $(\frac{1}{2})^{x-1} \leq (\frac{1}{2})^{-2}$ となる。

底 $(\frac{1}{2})$ は $0 < \frac{1}{2} < 1$ を満たすため、指数関数は減少する。

したがって、不等号の向きが逆になる。

$x - 1 \geq -2$ より、 $x \geq -1$ である。

等号を含む不等式なので、境界 $x = -1$ を含む。

元の式で確認すると、 $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ となり、条件を満たす。

したがって、解は $x \geq -1$ である。

演習 5 の解答・解説

9^x を 3^x の式として表す。

$$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$$

ここで、 $t = 3^x$ とおく。

指数関数の値は常に正なので、 $t > 0$ である。

すると、 $t^2 - 10t + 9 = 0$ となる。

因数分解すると、 $(t - 1)(t - 9) = 0$ より、 $t = 1$, $t = 9$ を得る。

どちらも $t > 0$ を満たす。

それぞれ元へ戻す。

$t = 1$ のとき、 $3^x = 1$ より、 $x = 0$ である。

$t = 9$ のとき、 $3^x = 9 = 3^2$ より、 $x = 2$ である。

したがって、解は $x = 0, 2$ である。

置換では、二次方程式の解をすべて採用するのではなく、元の置換条件 $t > 0$ を必ず確認する必要がある。

演習 6 の解答・解説

左辺は単独の指数式である。

指数関数では底が $7 > 0$ であるため、 $7^x > 0$ が常に成り立つ。

一方、右辺は $-2 < 0$ である。

したがって、 $7^x = -2$ を満たす実数 x は存在しない。

注意すべき点は、差を含む指数方程式全体ではなく、単独の指数式が負の値にならないことを利用している点である。

演習 7 の解答・解説

この考え方は誤りである。

1^x はどの実数 x に対しても、 $1^x = 1$ となる。

したがって、 $1^x = 1^2$ は $1 = 1$ を表しているだけであり、条件を満たす解はすべての実数である。

誤りは、 $1^x = 1^2$ から指数を比較して $x = 2$ としたことである。

指数比較を使うには、底が $a > 0$ 、 $a \neq 1$ であり、指数関数が厳密単調である必要がある。

1^x は定数関数であり、通常の広い意味では単調な関数として扱われる場合もある。しかし、指数比較の定理で必要となる厳密単調性をもたないため、指数同士を比較することはできない。

演習 8 の解答・解説

x は整数なので、 $(-2)^x$ の符号と絶対値を分けて考える。

$-8 < 0$ であるため、 $(-2)^x$ も負でなければならない。

負の底の整数乗では、指数が奇数のときに値が負になるため、 x は奇数である。

また、絶対値を比較すると、 $|(-2)^x| = 8$ より、 $2^x = 8$ である。

$8 = 2^3$ なので、 $2^x = 2^3$ となり、整数指数の計算から、 $x = 3$ である。

実際に代入すると、 $(-2)^3 = -8$ となり、条件を満たす。

したがって、整数の範囲では解は $x = 3$ である。

ただし、 $(-2)^x$ は底が負であり、本講で扱った $a > 0$ 、 $a \neq 1$ の指数関数の条件を満たさない。そのため、実数全体の指数関数として厳密単調性を使い、 $(-2)^x = (-2)^3$ から指数を比較することはできない。

整数の場合の計算結果が正しいことと、実数全体で指数比較の定理を使えることは別の問題である。