第 188 講 合成関数の微分

この講でできるようになること

合成関数が、外側の関数と内側の関数を組み合わせたものとして見られるようになる。
合成関数を微分するとき、内側の関数を一度別の文字で置き、外側の微分と内側の微分を組み合わせて計算できるようになる。
内側の変化率を掛ける理由を、変化の伝わり方から説明できるようになる。

合成関数を見る視点

関数の微分では、入力が少し変化したときに出力がどの程度変化するかを考えている。
合成関数では、入力が途中の値を経由して出力へ伝わる。例えば、$y=(x^2+1)^2$では、まずxから中間の値$u=x^2+1$を作り、そのuを使って$y=u^2$を作っている。
この関数は展開してから微分することもできる。しかし、合成された構造をそのまま見ることで、より複雑な関数でもどの変化がどこで生じているかを整理できる。
xの変化は、まずuの変化を生み、その後にyの変化へ影響する。この流れを分けて考えることが、合成関数の微分を理解する出発点である。



合成関数

実数値関数gと実数値関数fを考える。
gの定義域のうち、$g(x)$がfの定義域に入るxについて、合成関数Fを$F(x)=f(g(x))$と定義する。
このとき、gを内側の関数、fを外側の関数という。
例えば、$g(x)=x^2+1$、$f(u)=u^2$とすると、$F(x)=f(g(x))=(x^2+1)^2$となる。
一方で、合成する順序を変えると$g(f(x))=(x^2)^2+1$となり、一般には$f(g(x))$と$g(f(x))$は一致しない。
したがって、合成関数では、どの関数を先に適用するかという順序が重要である。

合成関数の微分の考え方

合成関数$F(x)=f(g(x))$について、$x=a$を含む開区間でgが定義され、aで微分可能であるとする。
また、$b=g(a)$を含む開区間でfが定義され、bで微分可能であるとする。
このとき、gはaで微分可能なので連続でもある。そのため、xがaの近くにあるとき、$g(x)$は$b=g(a)$の近くにあり、外側の関数fの定義域内で合成関数を考えることができる。
合成関数Fはaで微分可能であり、その微分係数は$F'(a)=f'(g(a))g'(a)$である。
ここで外側の導関数を評価する場所はaではなく$g(a)$である。外側の関数fはxを直接入力として受け取らず、内側の関数が作った値$g(a)$を入力として受け取るためである。
また、$u=g(x)$、$y=f(u)$と定義すると、変化の関係を$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$と表せる。この表記は変化の流れを表すものであり、分数のような形式的な約分によって証明するものではない。

途中の増分が 0 でも成り立つ証明

合成関数$F(x)=f(g(x))$について、$x=a$を含む開区間でgが定義されaで微分可能であり、$b=g(a)$を含む開区間でfが定義されbで微分可能であるという、合成関数の微分公式で用いた条件を仮定する。

hを 0 でない十分小さい実数とし、入力の増分を$h = x - a$、中間の増分を$k = g(a+h) - b$と定める。tは 0 の近くの実数で、$b + t$が外側の関数fの定義域内に入るものとする。外側の差商と微分係数との差を表す関数$r(t)$を次のように定める。

$$r(t) = \frac{f(b+t) - f(b)}{t} - f'(b) \quad (t \neq 0)$$

また、$t = 0$では$r(0) = 0$と定める。
fがbで微分可能であることから、tが 0 に近づくとき$r(t) \to 0$である。さらに$r(0) = 0$としているため、rは 0 で連続になり、$k = 0$の場合も含めて$r(k) \to 0$を考えることができる。
この定義から、次の恒等式が成り立つ。

$$f(b+t) - f(b) = (f'(b) + r(t))t$$

ここで$t = k$を代入する。kで割る必要はなく、途中の増分が 0 になる場合でも上の恒等式はそのまま利用できる。
合成関数の差商について、次の関係が成り立つ。

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = (f'(b) + r(k))\frac{k}{h}$$

gはaで連続なので、$h \to 0$のとき$k = g(a+h) - g(a) \to 0$となる。また、gがaで微分可能なので、$\frac{k}{h} \to g'(a)$である。
したがって、最後に次の極限を得る。

$$F'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

この証明では、途中の増分kが 0 になる場合を除外せず、剰余関数rによって微分可能性を表している。

合成関数を微分する手順

合成関数$F(x) = f(g(x))$を微分するときは、gが微分可能な各点で、外側の関数fも入力値$g(x)$のところで微分可能であることを確認する。
手順は次の 4 段階で考える。
1. 内側の関数$g(x)$を確認する。
2. 外側の関数fを入力をuとして微分し、$f'(u)$を求める。
3. 外側の導関数へ、最後に内側の値$u = g(x)$を戻す。
4. 内側の導関数$g'(x)$を掛ける。

したがって、$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$となる。
例えば、nを整数とし、$n \geq 2$のとき$(g(x))^n$を微分する場合は、外側の関数$f(u) = u^n$を考えると$f'(u) = nu^{n-1}$であるため、$\frac{d}{dx}(g(x))^n = ng(x)^{n-1}g'(x)$となる。
$n = 1$の場合は、特別にこの形へ当てはめるのではなく、もとの関数$g(x)$の微分をそのまま考える。

微分可能性と定義域

合成関数の微分公式を使うためには、内側の関数と外側の関数について微分可能性を確認する必要がある。
ただし、外側の関数fと内側の関数gがともに微分可能であることは、合成関数が微分可能になるための必要条件ではない。

例えば、外側の関数を$f(u) = |\ u\ |$、内側の関数を$g(x) = x^2$とする。両方の関数の定義域は実数全体であるが、fは$u = 0$で微分できない。
一方で、合成関数は$F(x) = |\ x^2\ | = x^2$となるため、$x = 0$でも微分可能であり、$F'(0) = 0$となる。
この例では、外側の関数$y = |\ u\ |$は原点で左側の傾きが-1、右側の傾きが1となり、1 本の接線を定められない。しかし、合成後の関数$y = x^2$は原点で接線$y = 0$を持つ。

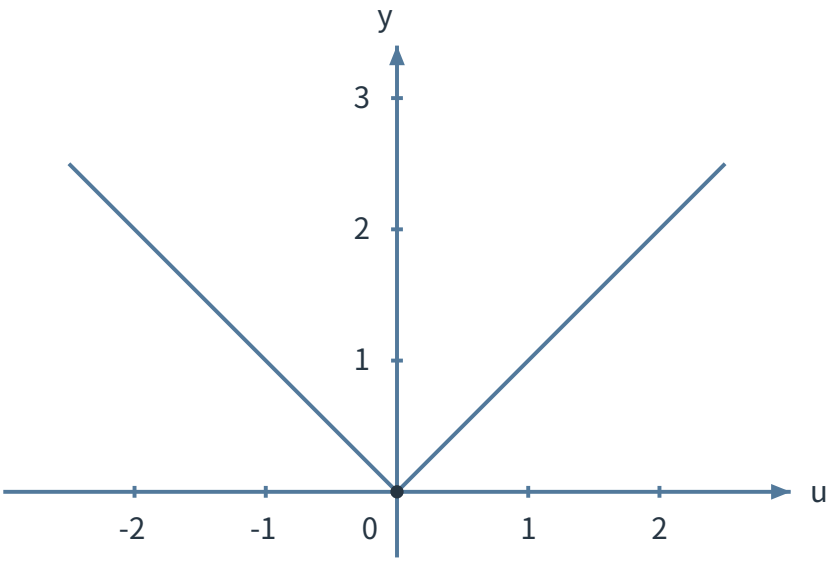

図 2　外側の関数 $f(u) = |\ u\ |$。$u = 0$ では左右の傾きが -1 と 1 で異なり、微分できない。

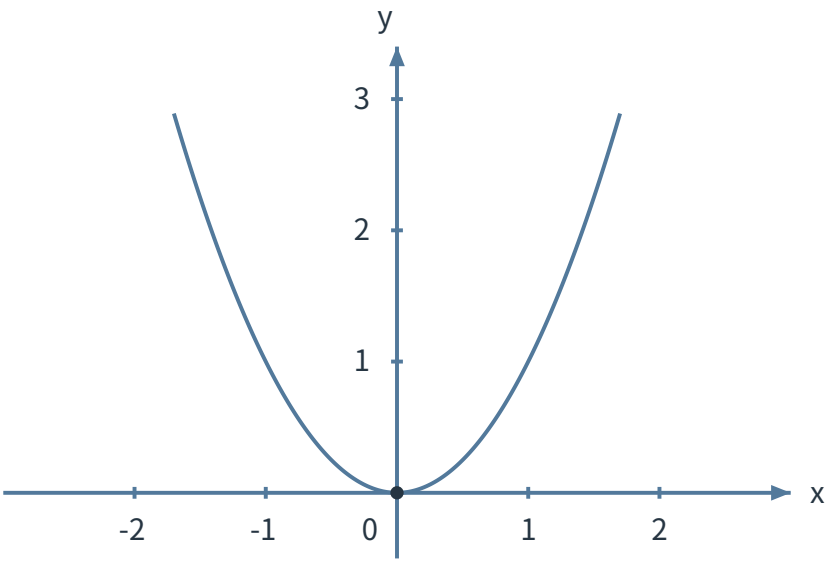

図 3　内側が $g(x)=x^2$ のとき、合成関数は $F(x)=f(g(x))=x^2$ である。$x=0$ で微分でき、接線 $y=0$ は横軸と一致する。

この違いを、外側の座標u上の$y=|\,u\,|$と、合成後の座標x上の$F(x)=x^2$を別々に示す比較図で表す。公式の条件を満たさない場合に、存在しない微分係数$f'(0)$を無理に代入してはいけない。

例題 1

xを実数とし、関数$F(x)=\left(x^2+1\right)^2$を考える。
$F'(x)$を求め、さらに$x=1$における接線の方程式を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

関数$F(x)$は、内側の関数$f(x)=x^2+1$と外側の関数$g(u)=u^2$を用いて$F(x)=g(f(x))$と考えられる。
内側の導関数は$f'(x)=2x$であり、外側の導関数は$g'(u)=2u$である。外側の導関数へ代入する値は$u=f(x)=x^2+1$である。
したがって、合成関数の微分より$F'(x)=g'(f(x))f'(x)=2\left(x^2+1\right)\cdot 2x$となり、$F'(x)=4x\left(x^2+1\right)$を得る。
$x=1$では$F(1)=4$であり、$F'(1)=8$となるため、点$P(1,4)$での接線の傾きは 8 である。
接線の方程式は$y-4=8(x-1)$であり、整理すると$y=8x-4$となる。

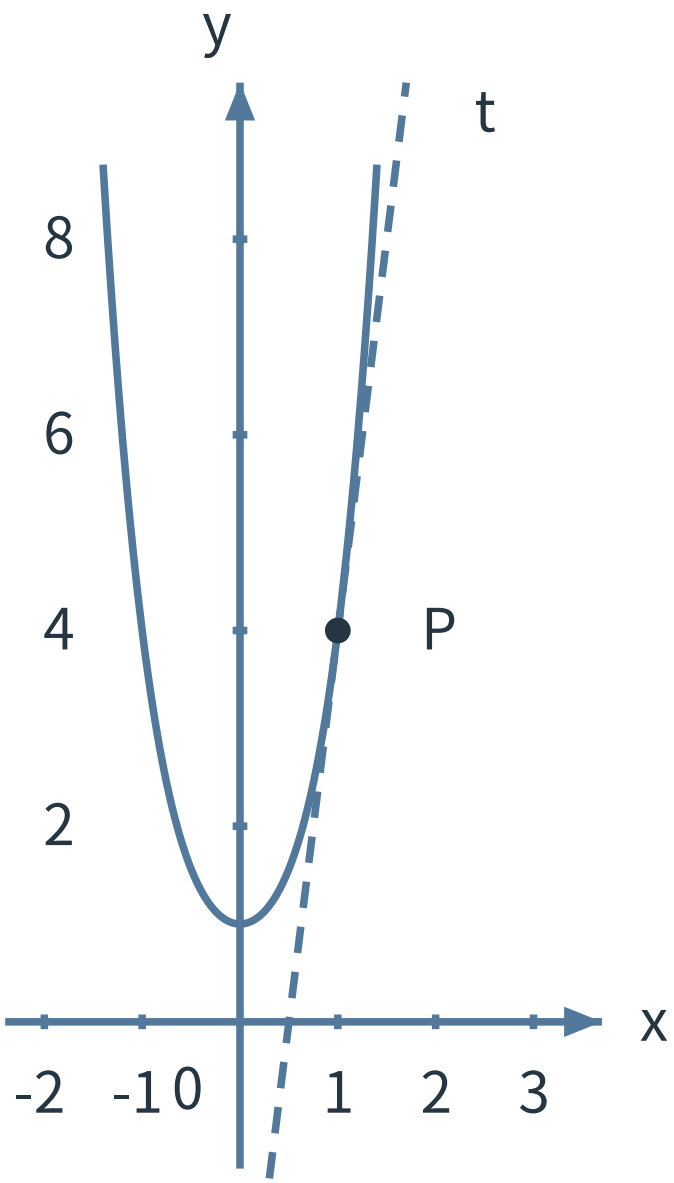

図 4　合成関数 $F(x)=\left(x^2+1\right)^2$ と点 $P(1,4)$ の接線 $t: y=8x-4$。接線の傾きは 8 である。

この図は曲線$F(x)=\left(x^2+1\right)^2$と点$P(1,4)$、その点での接線の関係を示す。接線は点$P$での変化を表す直線であり、曲線全体と一致する直線ではない。

例題 2

xを実数とし、関数$y=\left(2x^2-3x+1\right)^3$を考える。
yをxで微分しなさい。

例題 2 の解答・解説

内側の関数を$f(x)=2x^2-3x+1$、外側の関数を$g(u)=u^3$と考える。
内側の導関数は$f'(x)=4x-3$であり、外側の導関数は$g'(u)=3u^2$である。外側の導関数へ代入する値は$u=f(x)=2x^2-3x+1$である。
したがって、合成関数の微分より$y'=g'(f(x))f'(x)=3\left(2x^2-3x+1\right)^2(4x-3)$となる。
この計算では、外側の導関数だけでなく、内側の導関数$4x-3$を掛けることが重要である。

例題 3

xを実数とし、関数$y=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$を考える。
yをxで微分しなさい。

例題 3 の解答・解説

内側の関数を$f(x)=x^2+1$、外側の関数を$g(u)=\frac{1}{u^2}$と考える。全ての実数xで内側の値$u=x^2+1>0$となるため、分母は 0 にならない。
外側の関数を$g(u)=\frac{1}{u^2}$と見る。この微分は既習の商の微分を用いると、$g'(u)=\frac{0\cdot u^2-1\cdot 2u}{u^4}=-\frac{2}{u^3}$と求められる。
内側の導関数は$f'(x)=2x$であるため、合成関数の微分より$y'=-\frac{2}{u^3}\cdot 2x$となる。
$u=x^2+1$を戻すと、$y'=-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^3}$となる。
この計算では、未習の負指数の微分公式を使わず、外側の導関数を商の微分から求めている。

演習問題

演習 1

関数 $f(x)=x^2+1$ と $g(u)=u^3$ は、それぞれ実数全体で微分可能である。
$y=g(f(x))$ を微分しなさい。

演習 2

関数 $f(x)=2x-1$ と $g(u)=u^2+3u$ は、それぞれ実数全体で微分可能である。
$y=g(f(x))$ を微分しなさい。
また、外側の導関数へ代入する値を答えなさい。

演習 3

関数 $f(x)=x^2-4x+2$ と $g(u)=u^2$ は、それぞれ実数全体で微分可能である。
$x=3$ における $y=g(f(x))$ の導関数の値を求めなさい。

©ミライコーチング

演習 4

関数 $f(x)=x^2+2x$ と $g(u)=u^3$ は、それぞれ実数全体で微分可能である。
次の微分計算の誤りを説明し、正しい導関数を求めなさい。

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+2x\right)^3=3\left(x^2+2x\right)^2$$

演習 5

関数 $f(x)=x^2-5x+6$ と $g(u)=u^3$ は、それぞれ実数全体で微分可能である。
$x=2$ における $y=g(f(x))$ の導関数の値を求めなさい。
ただし、$f(2)=0$ であることを利用してよい。

演習 6

関数 f は実数全体で微分可能であり、$f(1)=3$、$f'(1)=2$ を満たす。
また、関数 $g(u)=u^2$ は実数全体で微分可能である。
$y=g(f(x))$ の$x=1$における導関数の値を求めなさい。

演習 7

fは実数全体で定義され、実数全体で微分可能な関数とする。また、$g(u)=u^2$も実数全体で微分可能な関数とする。
aを任意の実数とし、$F(x)=g(f(x))$と定める。
$f'(a)=0$のとき、Fのaでの微分係数$F'(a)$が必ず 0 になるか答え、その理由を説明しなさい。

演習 8

fとgはともに実数全体で定義され、実数全体で微分可能な関数とする。
$F(x)=f(g(x))$とし、aを実数とする。
次の命題(a)(b)(c)について、それぞれ正しいか誤りかを判定し、理由を説明しなさい。
(a) $g'(a)=0$ならば、$F'(a)=0$である。
(b) $F'(a)=0$ならば、必ず$g'(a)=0$である。
(c) $g'(a)=0$であることは、$F'(a)=0$となるための十分条件であるが、一般に必要条件とはいえない。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

xから$f(x)=x^2+1$を作り、その値を外側の関数$g(u)=u^3$へ入れる合成関数として考える。
内側の導関数は$f'(x)=2x$であり、外側の導関数は$g'(u)=3u^2$である。外側の導関数には、内側の値$u=f(x)=x^2+1$を代入する。
したがって、$y'=g'(f(x))f'(x)=3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x$となる。
整理すると、求める導関数は$y'=6x\left(x^2+1\right)^2$である。

演習 2 の解答・解説

内側の関数は$f(x)=2x-1$であり、外側の関数は$g(u)=u^2+3u$である。
外側を微分すると$g'(u)=2u+3$となる。ここで外側の導関数へ代入する値は$u=f(x)=2x-1$である。
また、内側の導関数は$f'(x)=2$なので、$y'=g'(f(x))f'(x)=(2(2x-1)+3)\cdot 2$となる。
整理すると、求める導関数は$y'=8x+2$である。

演習 3 の解答・解説

合成関数$F(x)=g(f(x))$と定め、$x=3$における微分係数$F'(3)$を求める。内側の関数$f(x)=x^2-4x+2$と外側の関数$g(u)=u^2$を分けて考え、点$x=3$での内側の微分係数と、その点で作られる値を外側の導関数へ入れて計算する。
内側の関数は$f(x)=x^2-4x+2$なので、$f(3)=-1$、$f'(3)=2$となる。
外側の関数は$g(u)=u^2$であるため、$g'(u)=2u$となる。したがって、外側の導関数を評価する点は$u=f(3)=-1$であり、$g'(-1)=-2$である。
よって、$F'(3)=g'(f(3))f'(3)=(-2)\cdot 2=-4$となる。

演習 4 の解答・解説

誤りは、外側の関数の微分だけを行い、内側の導関数を掛けていない点にある。
$f(x)=x^2+2x$、$g(u)=u^3$と考えると、外側の導関数は$g'(u)=3u^2$、内側の導関数は$f'(x)=2x+2$である。
外側へ入れる値は$u=f(x)=x^2+2x$なので、正しい計算は$y'=3\left(x^2+2x\right)^2(2x+2)$となる。
合成関数の微分では、外側の変化だけでなく、内側の変化がどれだけ伝わるかを掛け合わせる必要がある。

演習 5 の解答・解説

合成関数$F(x)=g(f(x))$と定め、$x=2$における微分係数$F'(2)$を求める。内側の関数$f(x)=x^2-5x+6$と外側の関数$g(u)=u^3$を分けて考え、点$x=2$での内側の微分係数と、その点の内側の値を外側の導関数へ代入して計算する。
内側の関数は$f(x)=x^2-5x+6$であり、$f(2)=0$、$f'(2)=-1$となる。
外側の関数は$g(u)=u^3$なので、$g'(u)=3u^2$である。外側の導関数へ入れる値は$u=f(2)=0$であり、$g'(0)=0$となる。
したがって、$F'(2)=g'(f(2))f'(2)=0\cdot(-1)=0$である。点$x=2$での内側の微分係数は$f'(2)=-1$であり、点$f(2)$での外側の微分係数は$g'(0)=0$なので、$F'(2)=g'(f(2))f'(2)=0$となる。

演習 6 の解答・解説

合成関数$F(x)=g(f(x))$と定め、$x=1$における微分係数$F'(1)$を求める。内側の関数fと外側の関数$g(u)=u^2$の変化を分けて考え、点$x=1$での内側の微分係数と、内側の値$f(1)$を用いて計算する。
条件より、内側の関数は$f(1)=3$、$f'(1)=2$を満たす。外側の関数は$g(u)=u^2$なので、$g'(u)=2u$である。
外側の導関数へ代入する値は$u=f(1)=3$であり、$g'(3)=6$となる。
よって、$F'(1)=g'(f(1))f'(1)=6\cdot 2=12$である。

©ミライコーチング

演習 7 の解答・解説

aは任意の実数として、$F(x) = g(f(x))$を考える。
合成関数の微分より、$F'(a) = g'(f(a))f'(a)$となる。条件より$f'(a) = 0$なので、$F'(a) = g'(f(a)) \cdot 0 = 0$である。
有限の$g'(f(a))$に 0 を掛けるため、点aでの微分係数$F'(a)$が必ず 0 になる。
一方で、$F'(a) = 0$だからといって、必ず$f'(a) = 0$とは限らない。点$f(a)$での外側の微分係数$g'(f(a))$が 0 になる場合もあるため、逆向きの条件は一般には成り立たない。

演習 8 の解答・解説

合成関数の微分より$F'(a) = f'(g(a))g'(a)$である。
(a)について、$g'(a) = 0$ならば$F'(a) = f'(g(a)) \cdot 0 = 0$となるため、(a)は正しい。
(b)について、$F'(a) = 0$であっても、積$f'(g(a))g'(a)$が 0 になる理由は複数ある。点$g(a)$での外側の微分係数$f'(g(a))$が 0 になる場合もあるため、$F'(a) = 0$から必ず$g'(a) = 0$とはいえない。
例えば、$g(x) = x$、$f(u) = u^2$、$a = 0$とすると、$F(x) = x^2$であり、$F'(0) = 0$となる。一方で、$g'(0) = 1$である。
したがって、(b)は誤りである。
(c)について、(a)より$g'(a) = 0$は$F'(a) = 0$となるための十分条件である。また、(b)の反例より、一般に必要条件とはいえない。
よって、(a)と(c)は正しく、(b)は誤りである。