第 013 講 相対速度で見る運動

この講でできるようになること

- 観測者と共通の基準を明示し、相対速度の式を説明できる。
- 一次元の速度に正負の符号を付け、同方向・逆方向の相対速度と相対速さを求められる。
- 相対位置と相対速度から、物体が近づくか遠ざかるかを判断できる。
- 二次元の相対速度を成分ごとの差として求め、矢印の向きと相対速さを説明できる。
- 相対速度が 0 となる条件と、観測者を交換したときの関係を説明できる。

1. 観測する人が変わると速度も変わる

まっすぐな道路を、車 A と車 B が同じ方向に走っている。道路脇に立つ人からは両方の車が動いて見えるが、車 B に乗る人からは車 A の動き方が違って見える。

車 A が車 B より速く走れば、車 B から見た車 A は前方へ進む。逆に車 B のほうが速ければ、車 A は後方へ動いて見える。

同じ車 A でも、**何を基準にして見るかによって速度の表し方は変わる**のである。

地面を共通の基準にする

まず、次のように記号を定める。

- A：動きを調べる物体
- B：観測者、または観測者と一緒に動く物体
- G：共通の基準として選んだ地面

右向きを正方向とする。

$v_{\mathrm{A/G}}$ は「地面 G に対する A の速度」、$v_{\mathrm{B/G}}$ は「地面 G に対する B の速度」を表す。さらに、$v_{\mathrm{A/B}}$ は「B から見た A の速度」を表す。

添字のスラッシュ / は数値の割り算ではない。**左側が調べる対象、右側が基準**であることを示す区切りである。

ここでは、観測者 B の座標軸は地面 G の座標軸と平行で、向きが回転しないものとする。地面 G は速度を比較するために選んだ基準であり、絶対的に唯一の静止した基準という意味ではない。

二つの車の位置を比べる

教材用の設定として、車 A と車 B が次の条件で一定の速度で走る場合を考える。

- 車 A の初期位置：$x_{\mathrm{A/G}}(0) = 10\,\mathrm{m}$
- 車 B の初期位置：$x_{\mathrm{B/G}}(0) = 0\,\mathrm{m}$
- 車 A の速度：$v_{\mathrm{A/G}} = +5\,\mathrm{m/s}$
- 車 B の速度：$v_{\mathrm{B/G}} = +2\,\mathrm{m/s}$

本講の数値式では、位置を m、時間を s、速度を m/s で測った数値を用いる。求めた物理量には対応する単位を付ける。

©ミライコーチング

時刻を τ、単位を s とし、同じ時刻の位置を並べる。

時刻 τ（s）	A の位置（m）	B の位置（m）	A の位置−B の位置（m）
0	10	0	+10
1	15	2	+13
2	20	4	+16

車 A と車 B はともに右向きに動いている。それでも、車 B から見た車 A の位置は、+10 m、+13 m、+16 m と変化する。

車 B から見ると、車 A は 1 秒あたり 3 m ずつ右へ遠ざかっている。この +3 m/s が、車 B に対する車 A の速度である。

2. 相対位置から相対速度を導く

相対位置とは何か

位置は基準を決めて表す量である。地面 G に対する A、B の位置をそれぞれ $x_{\mathrm{A/G}}$、$x_{\mathrm{B/G}}$ とする。

このとき、B から見た A の位置、すなわち**相対位置**は次のように表せる。

相対位置

$$x_{\mathrm{A/B}} = x_{\mathrm{A/G}} - x_{\mathrm{B/G}}$$

「A の位置から B の位置を引く」と、B を基準にした A の位置が得られる。

例えば、地面に対する位置が A は 20 m、B は 4 m ならば、

$$x_{\mathrm{A/B}} = 20 - 4 = +16\,\mathrm{m}$$

である。B から見て A は右側に 16 m の位置にいる。

相対位置の正負は方向を示す。正なら B より右、負なら B より左である。

相対位置の変化を時間で割る

共通の時間区間を、時刻 t_1 から t_2 までとする。経過時間は $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ である。

この間の相対位置の変化を $\Delta x_{\mathrm{A/B}}$ とすると、

$$\Delta x_{\mathrm{A/B}} = \Delta x_{\mathrm{A/G}} - \Delta x_{\mathrm{B/G}}$$

となる。A と B それぞれの変位を、同じ時間区間で比較している。

両辺を共通の経過時間 Δt で割る。

$$\frac{\Delta x_{\mathrm{A/B}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{\mathrm{A/G}}}{\Delta t} - \frac{\Delta x_{\mathrm{B/G}}}{\Delta t}$$

変位を経過時間で割った量は、その区間の**平均速度**である。平均速度を $\bar{v}$ と記すと、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = \bar{v}_{\mathrm{A/G}} - \bar{v}_{\mathrm{B/G}}$$

が得られる。

ここでは A と B の平均速度を、必ず同じ開始時刻・終了時刻で求める必要がある。

例えば、A の 0〜2 秒の平均速度と B の 2〜4 秒の平均速度を引いても、通常は同一時間区間の相対平均速度にはならない。

平均速度と、ある瞬間の速度

有限の時間区間から求めた平均速度は、ある瞬間の速度そのものではない。

同じ時刻の A と B の瞬間の速度を比較する場合にも、「A の速度−B の速度」という関係が成り立つ。ただし、異なる時刻の値や平均速度と瞬間速度を混ぜてはならない。

相対速度の式

一定速度で動く場合には、どの時間区間の平均速度も同じである。さらに、同じ時刻の瞬間速度についても次の関係を使える。

相対速度

$$v_{\mathrm{A/B}} = v_{\mathrm{A/G}} - v_{\mathrm{B/G}}$$

相対速度＝対象の速度−観測者の速度

引き算の前に、共通の基準・正方向・時刻をそろえることが必要である。

最初の車の例では、

$$v_{\mathrm{A/B}} = +5 - (+2) = +3\,\mathrm{m/s}$$

となる。位置の表から得た「1 秒あたり右へ 3 m ずつ」という変化と一致する。

3. 一次元では符号を付けて引く

相対速度の計算で大切なのは、「同方向なら差、逆方向なら和」と速さだけで暗記することではない。

まず共通の正方向を定め、各速度を正負の符号付きで表してから引く。

同方向に動く場合

右向きを正として、

$$v_{\mathrm{A/G}} = +5\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{\mathrm{B/G}} = +2\,\mathrm{m/s}$$

なら、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 5 - 2 = +3\,\mathrm{m/s}$$

となる。

B から見て A は右へ動く。

一方、A が $+2\,\mathrm{m/s}$、B が $+5\,\mathrm{m/s}$ なら、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 2 - 5 = -3\,\mathrm{m/s}$$

である。B から見ると A は左へ動く。

逆方向に動く場合

車 A が右へ 5 m/s、車 B が左へ 2 m/s で動くとする。

$$v_{\mathrm{A/G}} = +5\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{\mathrm{B/G}} = -2\,\mathrm{m/s}$$

したがって、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 5 - (-2) = +7\,\mathrm{m/s}$$

となる。

逆方向の運動で数値が加わったのは、負の速度を引いたためである。速さを足す規則を別に覚える必要はない。

観測者が静止している場合

地面に対して B が静止していれば、

$$v_{\mathrm{B/G}} = 0\,\mathrm{m/s}$$

なので、

$$v_{\mathrm{A/B}} = v_{\mathrm{A/G}}$$

である。

地面に対して静止している観測者から見た速度は、地面基準の速度と一致する。

相対速度と相対速さ

一次元の相対速度には正負の符号がある。一方、相対速さはその大きさであり、負にはならない。

一次元の相対速さ

$$\text{相対速さ} = |\,v_{\mathrm{A/B}}\,|$$

例えば、$v_{\mathrm{A/B}} = -3\,\mathrm{m/s}$ なら、相対速さは $3\,\mathrm{m/s}$ である。

相対速度の負号は、A が B から見て定めた正方向と逆向きに動いていることを示す。A が B より遅いという意味ではない。

例えば、$v_{\mathrm{A/G}} = -8\,\mathrm{m/s}$、$v_{\mathrm{B/G}} = +2\,\mathrm{m/s}$ なら、$v_{\mathrm{A/B}} = -10\,\mathrm{m/s}$ である。A の地面に対する速さは B より大きいが、相対速度は負となる。

条件を比較する

以下はすべて右向きを正とした、一次元の一定速度の例である。数値の単位は m/s とする。

地面から見た A	地面から見た B	B から見た A	相対速さ
+5	+2	+3	3
+5	−2	+7	7
+2	+5	−3	3
+5	0	+5	5
+3	+3	0	0

最後の行では、A と B の相対速度は 0 である。しかし、A と B が地面に対して静止しているわけではない。両者が同じ速度で動いているため、互いに見た位置が変化しないのである。

©ミライコーチング

例題 1

右向きを正とした道路上で、車 A は地面に対して $+3\,\mathrm{m/s}$、車 B は $+5\,\mathrm{m/s}$ の一定速度で走っている。

はじめに A は $x_{\mathrm{A/G}} = 12\,\mathrm{m}$、B は $x_{\mathrm{B/G}} = 0\,\mathrm{m}$ にいる。

(1) B から見た A の速度と相対速さを求めよ。

(2) 4 秒後の B から見た A の位置を求めよ。

(3) 最初の 4 秒間に A と B の距離は増えるか、減るか。理由とともに答えよ。

解答・解説

(1) 対象は A、観測者は B である。

$$v_{\mathrm{A/B}} = 3 - 5 = -2\,\mathrm{m/s}$$

相対速度は $-2\,\mathrm{m/s}$、相対速さは $2\,\mathrm{m/s}$ となる。

(2) 初めの相対位置は、

$$x_{\mathrm{A/B}}(0) = 12 - 0 = +12\,\mathrm{m}$$

である。4 秒間の相対位置の変化は、

$$(-2) \times 4 = -8\,\mathrm{m}$$

だから、

$$x_{\mathrm{A/B}}(4) = 12 - 8 = +4\,\mathrm{m}$$

となる。

(3) 初め A は B の右側にいる。B から見た A の速度は負なので、A は B から見て左へ動く。

4 秒後も A の相対位置は正であり、まだ B の右側にいる。したがって、この 4 秒間の距離は $12\,\mathrm{m}$ から $4\,\mathrm{m}$ へ減少する。

車 B は A を後ろから追いかけているのである。

4. 観測者を交換するとどうなるか

B から見た A と、A から見た B を比べる。

定義に従えば、

$$v_{\mathrm{A/B}} = v_{\mathrm{A/G}} - v_{\mathrm{B/G}}$$

$$v_{\mathrm{B/A}} = v_{\mathrm{B/G}} - v_{\mathrm{A/G}}$$

である。引き算の順序が反対になるため、

観測者を交換したときの関係

$$v_{\mathrm{B/A}} = -v_{\mathrm{A/B}}$$

相対速度は向きが逆になるが、相対速さは等しい。

例えば、B から見て A が右へ 3 m/s で動くなら、A から見た B は左へ 3 m/s で動く。

この関係は、どちらが先に出発したか、どちらが速いかという判断から生まれるものではない。「対象–観測者」の順序を交換した結果である。

5. 相対速度 0 は何を意味するか

同じ速度でも、同じ位置とは限らない

右向きを正として、A と B がどちらも +4 m/s の一定速度で動いているとする。

このとき、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 4 - 4 = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

はじめに A が B より 6 m 右側にいれば、2 秒後も 5 秒後も、A は B より 6 m 右側にいる。

相対速度が 0 だからといって、二つの物体が同じ場所にいるとは限らない。

区間全体で 0 なのか、ある瞬間だけ 0 なのか

相対位置が変化しないと判断するには、時間についての条件が必要である。

ある時間区間を通して相対速度が 0 である場合、その区間では相対位置が変化しない。

しかし、**ある瞬間だけ相対速度が 0 である場合**には、その前後の相対位置が一定とは限らない。

例えば、地面に対して B が静止し、A もある瞬間には静止しているとする。その直後に A が右へ動き始めれば、最初の瞬間の相対速度は 0 でも、その後の相対位置は変化する。

さらに、区間全体の平均相対速度が 0 であることと、区間中ずっと相対速度が 0 であることも異なる。

次の表では B が静止しており、A が移動して元の位置に戻ったとする。

時刻（s）	B から見た A の位置（m）
0	+5
2	+9
4	+5

0〜4 秒の平均相対速度は、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = \frac{5 - 5}{4} = 0\,\mathrm{m/s}$$

となる。それでも途中の相対位置は +9 m まで変化している。

相対速度 0 から言える範囲

ある瞬間の相対速度が 0 であること、ある区間の平均相対速度が 0 であること、ある区間を通して相対速度が 0 であることは、それぞれ異なる条件である。

相対位置が区間中ずっと一定だといえるのは、その区間を通して相対速度が 0 の場合である。

6. 相対位置を使って追いつく時刻を求める

A と B が一定速度で動くとき、相対位置は時間に対して一定の割合で変化する。

©ミライコーチング

ある時刻を基準にして、その時刻からの経過時間を τ とする。

一定の相対速度による位置の変化

$$x_{\mathrm{A/B}}(\tau) = x_{\mathrm{A/B}}(0) + v_{\mathrm{A/B}}\tau$$

この式は、指定された時間区間で相対速度が一定のときに使える。$\tau \geq 0$ とし、一定速度という条件が成立する範囲で考える。

例えば、初めに A が B より 20 m 左にいて、A の相対速度が +5 m/s なら、

$$x_{\mathrm{A/B}}(\tau) = -20 + 5\tau$$

である。

A と B が同じ位置になるときは、相対位置が 0 になる。

$$-20 + 5\tau = 0$$

よって、$\tau = 4\,\mathrm{s}$ である。

ただし、この式を使ってよいのは、A と B が設定された一定速度で動き続けている時間内である。

相対速さと距離の変化を混同しない

一次元では、相対位置の絶対値 $|x_{\mathrm{A/B}}|$ が A と B の距離である。

相対位置が正で相対速度が負なら、A は B の右側から左向きに近づく。一方、相対位置が負で相対速度も負なら、A は B の左側からさらに左へ遠ざかる。

同じ負の相対速度でも、近づく場合と遠ざかる場合がある。

また、二つの物体が同じ位置を通り過ぎると、近づいていた運動が遠ざかる運動へ変わることがある。

距離の増減を判断する順序

相対速度の符号だけで近づくか遠ざかるかを決めず、まず相対位置の符号を確かめる。

相対位置と相対速度が逆符号なら、その時点では距離が減る向きに動く。同符号なら、距離が増える向きに動く。相対位置が 0 の瞬間は距離が 0 であり、通過後の距離の増減はその後の運動で判断する。

例題 2

右向きを正とする直線道路で、車 A は地面の位置 0 m、車 B は 20 m から同時に動き始める。

A は +8 m/s、B は +3 m/s の一定速度で、少なくとも 0〜6 秒の間走り続ける。

(1) B から見た A の相対速度を求めよ。

(2) B から見た A の相対位置を、経過時間 τ を使って表せ。

(3) A が B に追いつく時刻と、そのときの地面に対する位置を求めよ。

解答・解説

(1) 地面を共通基準として、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 8 - 3 = +5\,\mathrm{m/s}$$

である。

(2) 初めの相対位置は、

$$x_{\mathrm{A/B}}(0) = 0 - 20 = -20\,\mathrm{m}$$

なので、

$$x_{\mathrm{A/B}}(\tau) = -20 + 5\tau$$

となる。右辺の数値は、位置を m、時間を s で表したものである。

(3) 追いつくときは相対位置が 0 となる。

$$-20 + 5\tau = 0$$

したがって、

$$\tau = 4\,\mathrm{s}$$

である。これは一定速度が保証されている 0〜6 秒の範囲内にある。

そのとき A の地面に対する位置は、

$$x_{\mathrm{A/G}} = 0 + 8 \times 4 = 32\,\mathrm{m}$$

となる。B についても、

$$x_{\mathrm{B/G}} = 20 + 3 \times 4 = 32\,\mathrm{m}$$

であり、一致する。

よって、**出発から 4 秒後、地面の位置 32 m で追いつく**。

7. 二次元では速度の成分ごとに引く

ここまでは一本の直線上の運動を扱った。しかし、物体は平面内で異なる方向に動くこともある。

例えば、A が東へ、B が北へ進む場合、二つの速度の大きさをそのまま引いても相対速度は求められない。

速度は向きを持つベクトルである。二次元では、**ベクトルの差を各成分の差として計算する**。

二次元の相対速度の式

地面 G に対して、右向きをx軸の正方向、上向きをy軸の正方向とする。

それぞれの速度を $\vec{v}_{\mathrm{A/G}}$、$\vec{v}_{\mathrm{B/G}}$ と表すと、

二次元の相対速度

$$\vec{v}_{\mathrm{A/B}} = \vec{v}_{\mathrm{A/G}} - \vec{v}_{\mathrm{B/G}}$$

各成分は、

$$v_{\mathrm{A/B},x} = v_{\mathrm{A/G},x} - v_{\mathrm{B/G},x}$$

$$v_{\mathrm{A/B},y} = v_{\mathrm{A/G},y} - v_{\mathrm{B/G},y}$$

となる。

速度ベクトルを成分で書くときは、$(x$ 成分$, y$ 成分$)$ の順に並べる。

矢印で差を確かめる

次の速度を持つ二つの物体を考える。

$$\vec{v}_{\mathrm{A/G}} = (4, 0)\,\mathrm{m/s}$$

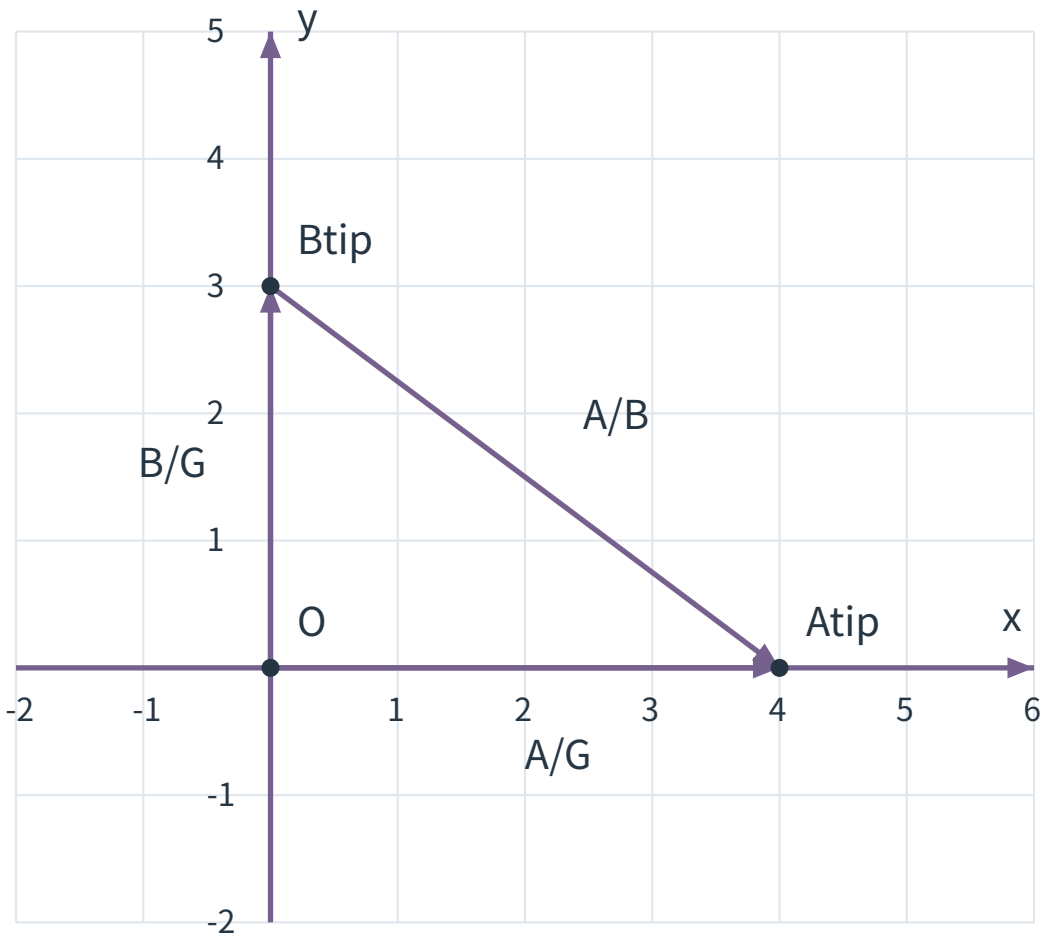
$$\vec{v}_{\mathrm{B/G}} = (0, 3)\,\mathrm{m/s}$$

A は右へ 4 m/s、B は上へ 3 m/s で動いている。

下の図は、第 004 講で学んだベクトルの差の作図を、速度に適用したものである。

図の横軸は速度のx成分、縦軸は速度のy成分を表し、両方とも単位は m/s である。図中の O は速度ベクトルを描くための共通始点であり、Atip と Btip はそれぞれ A と B の速度矢印の先端を示す点である。

図中の「A/G」「B/G」「A/B」は速度ベクトルを識別する略記であり、数値の比ではない。



この図では、O から Atip への矢印が A の速度、O から Btip への矢印が B の速度である。

そして、**B の速度矢印の先端 Btip から A の速度矢印の先端 Atip へ向かう矢印**が、A の速度から B の速度を引いたベクトルを表す。

計算すると、

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{A/B}} &= (4,0)-(0,3)\\ &= (4,-3)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

B から見た A は、右向きに $4\,\mathrm{m/s}$、下向きに $3\,\mathrm{m/s}$ の速度成分を持つ。

速度矢印と位置の矢印は別物

図中の Atip と Btip は、実際の物体 A と B の位置を表さない。

速度ベクトルを比較するために矢印を共通の始点へ移して描いているだけであり、物体 A と B が空間内の同じ位置にいることを意味しない。

相対速さは三平方の定理で求める

二次元の相対速度が $(4, -3)\,\mathrm{m/s}$ なら、その大きさは直角三角形の斜辺の長さに対応する。

$$
\begin{aligned}
|\,\vec{v}_{\mathrm{A/B}}\,| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{16 + 9} \\
&= 5\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

したがって、B から見た A の相対速さは $5\,\mathrm{m/s}$ となる。

相対速度は右下方向を向いている。水平右向きから下へ測る角度を θ とすれば、直角三角形の隣辺が 4、対辺が 3 であるため、

$$
\tan\theta = \frac{3}{4}
$$

と表せる。ここでの角度は右向きのx軸を基準としている。

相対速度の大きさを求めるだけなら、角度の計算は必要ない。

速度ベクトルの差と、速さの差

一般に、

$$
|\,\vec{v}_{\mathrm{A/G}} - \vec{v}_{\mathrm{B/G}}\,| \neq |\,|\,\vec{v}_{\mathrm{A/G}}\,| - |\,\vec{v}_{\mathrm{B/G}}\,|\,|
$$

である。

左辺は二つの速度ベクトルの差の大きさ、右辺はそれぞれの速さの差の絶対値である。二つの速度の向きが異なるとき、この二つは通常一致しない。

また、観測者を交換すると、

$$
\vec{v}_{\mathrm{B/A}} = -\vec{v}_{\mathrm{A/B}}
$$

が成り立つ。先ほどの図では、Atip から Btip へ向かう逆向きの矢印が B/A に対応する。

例題 3

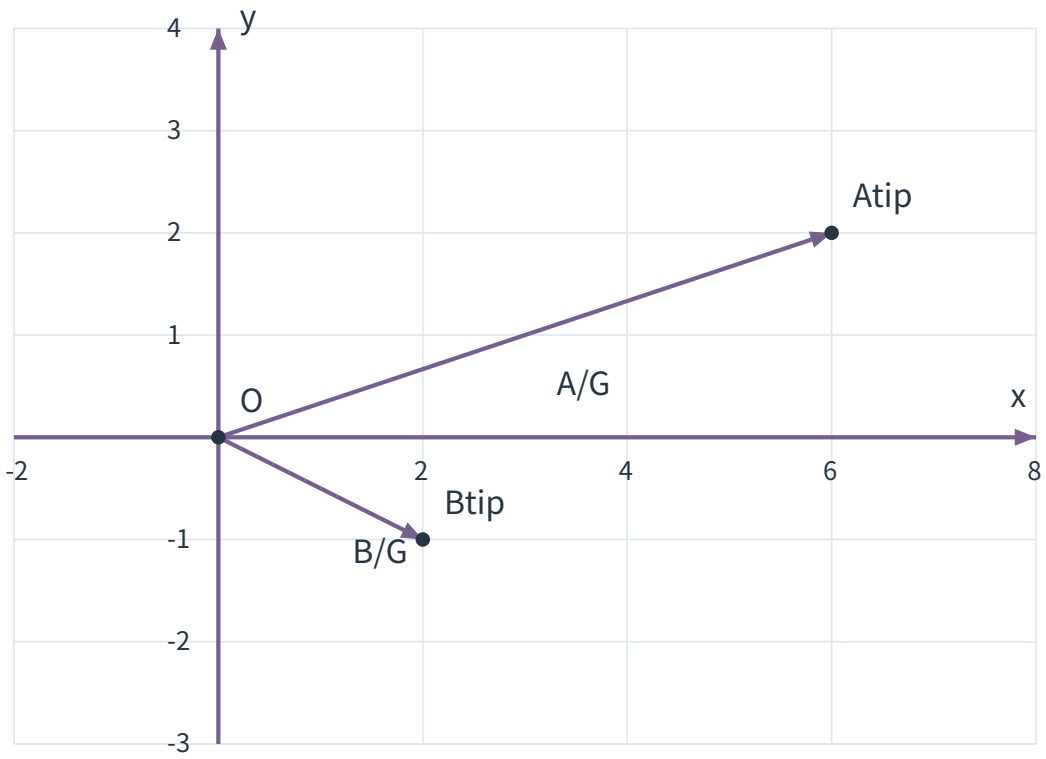
地面 G に対する物体 A と観測者 B の速度が、次のように与えられている。

$$\vec{v}_{\mathrm{A/G}} = (6, 2)\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{B/G}} = (2, -1)\,\mathrm{m/s}$$

右向きをx軸の正方向、上向きをy軸の正方向とする。

下の図は、与えられた二つの速度ベクトルを共通の始点 O から描いたものである。座標値は速度の成分を m/s で表しており、物体の実際の位置ではない。



(1) B から見た A の相対速度を成分で求めよ。

(2) 相対速さを求めよ。

(3) 相対速度が図のどちらの向きになるか説明せよ。

解答・解説

(1) 成分ごとに引く。

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{A/B}} &= (6, 2) - (2, -1) \\ &= (6 - 2, 2 - (-1)) \\ &= (4, 3)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

(2) 相対速さは、

$$|\vec{v}_{\mathrm{A/B}}| = \sqrt{4^2+3^2}$$
$$= 5\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) 相対速度のx成分もy成分も正なので、向きは右上である。

図では、B の速度矢印の先端 Btip から A の速度矢印の先端 Atip へ向かう矢印に対応する。この差ベクトルの成分が $(4,3)$ となることを確認できる。

8. 基準をつないで速度を求める

相対速度の式は、観測者から見た速度が与えられていて、地面から見た速度を求める場合にも使える。

$$\vec{v}_{\mathrm{A/B}} = \vec{v}_{\mathrm{A/G}} - \vec{v}_{\mathrm{B/G}}$$

を変形すると、

速度の基準をつなぐ式

$$\vec{v}_{\mathrm{A/G}} = \vec{v}_{\mathrm{A/B}} + \vec{v}_{\mathrm{B/G}}$$

対象 A の地面に対する速度は、「B に対する A の速度」と「地面に対する B の速度」を足して求められる。

これは別の法則を追加したのではなく、相対速度の定義式を変形したものである。

船と川の流れで考える

川の水とともに動く基準を W、川岸に固定した基準を G、船を C とする。

- $\vec{v}_{\mathrm{C/W}}$：水に対する船の速度
- $\vec{v}_{\mathrm{W/G}}$：川岸に対する水の速度
- $\vec{v}_{\mathrm{C/G}}$：川岸に対する船の速度

これらの間には、

$$\vec{v}_{\mathrm{C/G}} = \vec{v}_{\mathrm{C/W}} + \vec{v}_{\mathrm{W/G}}$$

が成り立つ。

例えば、右向きを正として、水に対する船の速度が $+4\,\mathrm{m/s}$、川岸に対する水の速度が $-1\,\mathrm{m/s}$ なら、

$$v_{\mathrm{C/G}} = 4 + (-1) = +3\,\mathrm{m/s}$$

となる。

船は水に対して右へ進んでいるが、水自体は川岸に対して左へ流れている。そのため、川岸から見た船の速度は右向きに $3\,\mathrm{m/s}$ となる。

なお、二次元の川の流れでも同じ関係が使える。その場合には方向ごとの速度成分を加えればよい。

例題 4

東向きを正とする一直線上で、船 C は水 W に対して $+3.5\,\mathrm{m/s}$ の一定速度で進んでいる。水は川岸 G に対して $-1.5\,\mathrm{m/s}$ の一定速度で流れている。

(1) 川岸から見た船の速度を求めよ。

(2) 船から見た水の速度を求めよ。

解答・解説

(1) 船の対水速度と水の対地速度を足す。

$$v_{\mathrm{C/G}} = 3.5 + (-1.5) = +2.0\,\mathrm{m/s}$$

したがって、川岸から見た船は東へ $2.0\,\mathrm{m/s}$ で動く。

(2) 船から見た水の速度は、観測者を交換して求める。

$$v_{\mathrm{W/C}} = -v_{\mathrm{C/W}} = -3.5\,\mathrm{m/s}$$

したがって、船から見ると水は西へ $3.5\,\mathrm{m/s}$ で動く。

川岸から見た水の速度 $-1.5\,\mathrm{m/s}$ と、船から見た水の速度 $-3.5\,\mathrm{m/s}$ は、基準が異なるため一致しない。

演習問題

演習 1

右向きを正とする直線上で、物体 A と観測者 B が動いている。すべて地面 G を共通基準とし、示された速度は同じ時刻の値とする。

(1) $v_{\mathrm{A/G}} = +2\,\mathrm{m/s}$、$v_{\mathrm{B/G}} = +5\,\mathrm{m/s}$ のとき、B から見た A の相対速度と相対速さを求めよ。

(2) $v_{\mathrm{A/G}} = -4\,\mathrm{m/s}$、$v_{\mathrm{B/G}} = +2\,\mathrm{m/s}$ のとき、B から見た A の相対速度と相対速さを求めよ。

(3) (2)の条件で、A から見た B の相対速度を求めよ。

(4) (2)の条件で相対速度が負になることから、「A は B より地面に対する速さが小さい」と結論づけてよいか。理由を説明せよ。

演習 2

地面 G に固定した座標軸で、右向きを正とする。物体 A、観測者 B の位置が次の表のように記録された。

時刻（s）	A の位置（m）	B の位置（m）
0	+2	0
2	+10	+4
4	+16	+8

(1) 0〜4 秒の A と B それぞれの地面に対する平均速度を求めよ。

(2) 0〜4 秒の B から見た A の平均相対速度を求めよ。

(3) 0〜2 秒の B から見た A の平均相対速度を求めよ。

(4) (2)と(3)で求めた平均相対速度が異なる場合、それだけで特定の瞬間の相対速度を決定できるか。理由を説明せよ。

(5) 一般に、A の 0〜2 秒の平均速度から B の 2〜4 秒の平均速度を引いて、0〜2 秒の平均相対速度としてよいか。理由を説明せよ。

演習 3

右向きを正とした一直線上で、車 A は位置 0 m、車 B は位置 30 m から同時に動き始める。

車 A は +9 m/s、車 B は +4 m/s の一定速度で、少なくとも 0〜8 秒の間は走り続ける。

(1) B から見た A の相対速度と、初めの相対位置を求めよ。

(2) 出発から 4 秒後の相対位置を求め、二つの車の距離が初めより増えたか減ったか説明せよ。

(3) A が B に追いつくのは出発から何秒後か。そのときの地面に対する位置も求めよ。

(4) 出発から 7 秒後、二つの車の距離は何 m か。また、その時点で距離は増える向きに変化しているか、減る向きに変化しているか答えよ。

©ミライコーチング

演習 4

次の三つの場合について考える。いずれも右向きを正とする一次元の運動である。

場合 I

0〜5 秒の間、A と B はともに一定の速度 $+4\,\mathrm{m/s}$ で動く。初めの相対位置は $x_{\mathrm{A/B}}(0) = -7\,\mathrm{m}$ である。

場合 II

ある瞬間 t_0 に A と B の速度がともに $0\,\mathrm{m/s}$ である。ただし、その前後の運動については条件が与えられていない。

場合 III

B は 0〜4 秒の間、地面に対して静止している。B から見た A の位置は、0 秒で $+5\,\mathrm{m}$、2 秒で $+9\,\mathrm{m}$、4 秒で $+5\,\mathrm{m}$ である。

(1) 場合 I の 5 秒後の相対位置を求めよ。A と B が同じ位置にいるかも答えよ。

(2) 場合 II で、t_0 の前後も相対位置が一定であると結論づけてよいか。理由を説明せよ。

(3) 場合 III の 0〜4 秒の平均相対速度を求めよ。また、区間中ずっと相対位置が一定だったといえるか説明せよ。

©ミライコーチング

演習 5

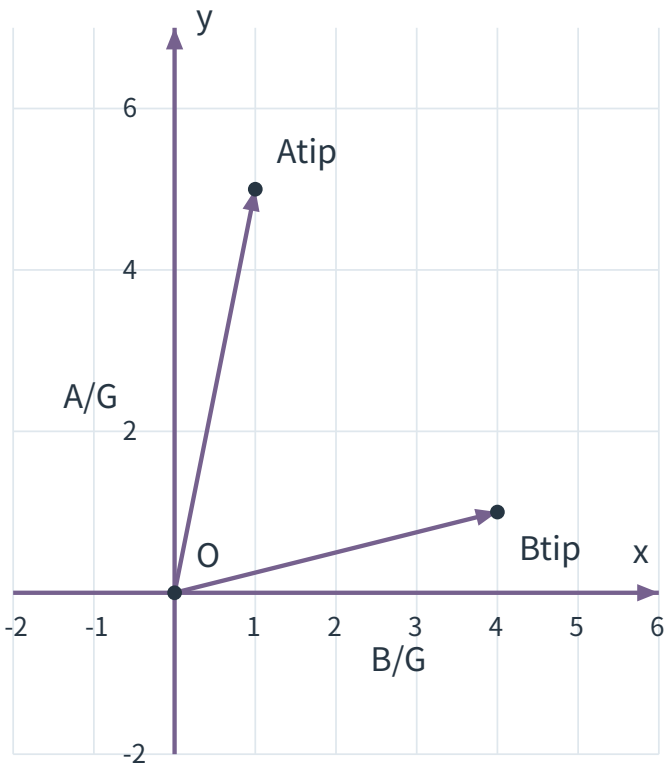
地面 G に対して、右向きをx軸の正方向、上向きをy軸の正方向とする。

物体 A と観測者 B の、同じ時刻の速度は次のとおりである。

$$\vec{v}_{\mathrm{A/G}} = (1, 5)\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{B/G}} = (4, 1)\,\mathrm{m/s}$$

下の図では、二つの速度を共通始点 O から描いている。座標値は速度の成分を $\mathrm{m/s}$ で表し、Atip と Btip は速度矢印の先端である。



(1) B から見た A の相対速度を成分で求めよ。

(2) B から見た A の相対速さを求めよ。

(3) A から見た B の相対速度を成分で求めよ。

(4) B から見た A の速度ベクトルは、図のどの点からどの点へ向かう矢印で表されるか。また、その向きが左上・右上・左下・右下のどれに当たるか答えよ。

(5) 二つの地面に対する速さの差の絶対値と、(2)の相対速さは等しいか。式を使って説明せよ。

演習 6

右向きを東の正方向とする一直線上の川で、船 C と水 W の運動を考える。川岸を G とする。

船 C の水 W に対する速度は $+4.0\,\mathrm{m/s}$、水 W の川岸 G に対する速度は $-1.0\,\mathrm{m/s}$ であり、いずれも一定とする。

(1) 川岸 G から見た船 C の速度と速さを求めよ。

(2) 船 C から見た水 W の速度を求めよ。

(3) 川岸 G から見た船 C の速度だけが $+3.0\,\mathrm{m/s}$ と分かっている場合、それだけで船 C の水 W に対する速度を求められるか。理由を説明せよ。

(4) 一定速度という条件のもとで、川岸 G から見た船 C の 5 秒間の変位を求めよ。

演習問題の解答・解説

解答 1

(1) 相対速度は対象 A の速度から観測者 B の速度を引いて求める。

$$v_{\mathrm{A/B}} = 2 - 5 = -3\,\mathrm{m/s}$$

したがって、相対速度は $-3\,\mathrm{m/s}$、相対速さは $3\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 負の速度を引くのではなく、負の速度を持つ A の速度から正の速度を持つ B の速度を引く。

$$v_{\mathrm{A/B}} = -4 - (+2) = -6\,\mathrm{m/s}$$

相対速度は $-6\,\mathrm{m/s}$、相対速さは $6\,\mathrm{m/s}$ である。

(3) 観測者を交換すると相対速度の符号が逆になる。

$$v_{\mathrm{B/A}} = -v_{\mathrm{A/B}} = +6\,\mathrm{m/s}$$

したがって、A から見た B の相対速度は $+6\,\mathrm{m/s}$ となる。

(4) 結論づけてはならない。

地面に対する A の速さは $4\,\mathrm{m/s}$、B の速さは $2\,\mathrm{m/s}$ であり、A のほうが大きい。

相対速度の負号は、B から見た A が左向きに動いていることを示すだけである。

解答 2

(1) 0〜4 秒の変位を共通の経過時間 4 秒で割る。

A の平均速度は、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/G}} = \frac{16 - 2}{4} = +3.5\,\mathrm{m/s}$$

である。

B の平均速度は、

$$\bar{v}_{\mathrm{B/G}} = \frac{8 - 0}{4} = +2.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(2) 同じ 0〜4 秒の平均速度を引く。

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = 3.5 - 2.0 = +1.5\,\mathrm{m/s}$$

相対位置から確かめると、0 秒では $2 - 0 = +2\,\mathrm{m}$、4 秒では $16 - 8 = +8\,\mathrm{m}$ である。

よって、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = \frac{8 - 2}{4} = +1.5\,\mathrm{m/s}$$

と一致する。

(3) 0〜2 秒について計算する。

A の平均速度は、

$$\frac{10 - 2}{2} = +4\,\mathrm{m/s}$$

B の平均速度は、

$$\frac{4 - 0}{2} = +2\,\mathrm{m/s}$$

だから、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = 4 - 2 = +2\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(4) 決定できない。

(2)と(3)は異なる時間区間についての平均相対速度である。各区間の位置の変化は分かるが、特定の瞬間にどのような速度で動いていたかまでは、表の値だけでは確定しない。

(5) 一般にはよくない。

相対平均速度を求めるときは、A と B の速度を同じ開始時刻・終了時刻で比較する必要がある。異なる時間区間の平均速度をそのまま引いても、共通の相対位置の変化を同じ経過時間で割った計算には対応しない。

解答 3

(1) 相対速度は、

$$v_{\mathrm{A/B}} = 9 - 4 = +5\,\mathrm{m/s}$$

である。

初めの相対位置は、

$$x_{\mathrm{A/B}}(0) = 0 - 30 = -30\,\mathrm{m}$$

となる。

(2) 一定相対速度なので、

$$x_{\mathrm{A/B}}(\tau) = -30 + 5\tau$$

である。4 秒後は、

$$x_{\mathrm{A/B}}(4) = -30 + 5 \times 4 = -10\,\mathrm{m}$$

となる。

初めの距離は 30 m、4 秒後は 10 m である。距離は 20 m 減少した。

(3) 同じ位置になるとき、相対位置は 0 となる。

$$-30 + 5\tau = 0$$

よって、

$$\tau = 6\,\mathrm{s}$$

である。

この時刻は一定速度で動くと与えられた 0〜8 秒の範囲に入っている。

地面に対する位置は、

$$x_{\mathrm{A/G}} = 9 \times 6 = 54\,\mathrm{m}$$

となる。B についても、

$$x_{\mathrm{B/G}} = 30 + 4 \times 6 = 54\,\mathrm{m}$$

であり、一致する。

したがって、出発から 6 秒後、地面の位置 54 m で追いつく。

(4) 7 秒後の相対位置は、

$$x_{\mathrm{A/B}}(7) = -30 + 5 \times 7 = +5\,\mathrm{m}$$

なので、距離は 5 m である。

この時点では A が B より右側にいて、相対速度も正である。したがって、A は B からさらに右へ離れ、距離は増える向きに変化している。

追いつく前は近づいていたが、通過後は遠ざかっている。

解答 4

(1) A と B は 0〜5 秒の間、常に同じ速度で動いている。

$$v_{\mathrm{A/B}} = 4 - 4 = 0\,\mathrm{m/s}$$

したがって、相対位置は変化しない。

$$x_{\mathrm{A/B}}(5) = -7\,\mathrm{m}$$

となる。A は B より左側に 7 m 離れており、同じ位置にはいない。

(2) 結論づけてはならない。

t_0 の瞬間には両者の速度が等しく、相対速度は 0 である。しかし、その後に一方が動き始め、他方が静止したままであれば、相対位置は変化する。

ある瞬間だけ相対速度が 0 という条件では、前後の相対位置の変化まで判断できない。

(3) 0 秒と 4 秒で相対位置が同じなので、

$$\bar{v}_{\mathrm{A/B}} = \frac{5-5}{4} = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。

ただし、2 秒後の相対位置は $+9\,\mathrm{m}$ となっており、初めの $+5\,\mathrm{m}$ とは異なる。

したがって、区間中ずっと相対位置が一定だったとはいえない。

区間全体の平均相対速度 0 は、相対位置の正味の変化が 0 であることを示す。区間中ずっと相対速度が 0 であることとは異なる。

解答 5

(1) 成分ごとに引く。

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{A/B}} &= (1,5) - (4,1)\\ &= (-3,4)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

したがって、相対速度は $(-3,4)\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 相対速さはベクトルの大きさなので、

$$\begin{aligned}|\,\vec{v}_{\mathrm{A/B}}\,| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2}\\ &= \sqrt{9+16}\\ &= 5\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

(3) 観測者を交換すると、

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{B/A}} &= -\vec{v}_{\mathrm{A/B}}\\ &= (3,-4)\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

となる。

(4) B の速度矢印の先端 Btip から、A の速度矢印の先端 Atip へ向かう矢印で表される。
相対速度のx成分が負、y成分が正であるため、向きは左上である。

(5) 等しくない。
A の地面に対する速さは、

$$|\vec{v}_{\mathrm{A/G}}| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}\,\mathrm{m/s}$$

であり、B の地面に対する速さは、

$$|\vec{v}_{\mathrm{B/G}}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}\,\mathrm{m/s}$$

である。
したがって、二つの速さの差の絶対値は、

$$|\sqrt{26}-\sqrt{17}\,|\,\mathrm{m/s}$$

となり、(2)で求めた 5 m/s とは一致しない。
速さだけを引く操作では、二つの速度が異なる方向を向いていることが計算に反映されない。相対速さは、ベクトルの差を先に求めてからその大きさを計算する必要がある。

解答 6

(1) 対水速度と水の対地速度を足す。

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{C/G}} &= v_{\mathrm{C/W}} + v_{\mathrm{W/G}} \\ &= 4.0 + (-1.0) \\ &= +3.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

したがって、川岸から見た船の速度は $+3.0\,\mathrm{m/s}$、速さは $3.0\,\mathrm{m/s}$ である。
(2) 観測者を船 C に交換すると、

$$v_{\mathrm{W/C}} = -v_{\mathrm{C/W}} = -4.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。船から見た水の速度は西向きに $4.0\,\mathrm{m/s}$ である。
(3) それだけでは求められない。

$$v_{\mathrm{C/W}} = v_{\mathrm{C/G}} - v_{\mathrm{W/G}}$$

だから、船の対水速度を求めるには、水の対地速度も必要である。
川岸から見た船の速度が同じでも、水の流れ方が異なれば、船の対水速度は異なる場合がある。
(4) 船の地面に対する速度は $+3.0\,\mathrm{m/s}$ で一定なので、5 秒間の変位は、

$$\Delta x_{\mathrm{C/G}} = v_{\mathrm{C/G}}\Delta t = 3.0\times 5 = +15\,\mathrm{m}$$

となる。
したがって、川岸から見た船の変位は東向きに $15\,\mathrm{m}$ である。