第 043 講 ばねと振り子の周期

この講でできるようになること

- 振動の 1 周期を正しく判断し、周期・振動数・角振動数の関係を使える。
- 理想ばね振り子の運動から周期の式を導き、質量・ばね定数・振幅・重力の影響を説明できる。
- 単振り子に働く力を接線方向に分け、小振幅近似から周期の式を説明できる。
- ばね振り子と単振り子について、条件を変えたときの周期の変化を比較できる。
- 小振幅近似が成り立つ範囲と、周期の式をそのまま使えない場合を判断できる。

1. 同じように揺れても、周期を決めるものは違う

ばねにつないだおもりを引いて放すと、おもりは往復運動をする。糸につるしたおもりを横へずらして放しても、左右に揺れる。

どちらも振動を繰り返すが、揺れる速さを決める条件は同じではない。

例えば、ばねのおもりを重くすると、往復にかかる時間はどうなるだろうか。一方、糸につるしたおもりを重くした場合も同じ変化が起こるのだろうか。

この違いを説明するには、見た目だけでなく、おもりに働く力と運動方程式を調べる必要がある。

1.1 周期はどこからどこまでか

周期・振動数・角振動数

周期 T は、振動する物体が同じ運動状態に戻るまでの時間である。単位は s で、$T>0$ とする。

ここで同じ運動状態とは、**同じ位置に、同じ運動の向きで戻ること**を意味する。

振動数 f は 1 秒間に繰り返す振動の回数であり、単位は Hz である。

角振動数 ω は振動の進み方を角度に対応させた量であり、単位は rad/s である。

これらには次の関係がある。

$$f=\frac{1}{T},\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

右端から静かに動き始めたおもりを考える。

右端から左端へ移動しただけでは、まだ 1 周期ではない。左端から再び右端へ戻り、最初と同じ運動状態になって初めて 1 周期である。

また、中央のつり合い位置を右向きに通過した後、左向きに通過したときは、位置こそ同じだが運動の向きが異なる。これを 1 周期と数えてはならない。

2. ばね振り子の周期

2.1 ばねの力が振動を生み出す

一端を固定した軽いばねに、質量 m のおもりを取り付ける。おもりは滑らかな水平面上を動き、摩擦と空気抵抗を無視できるとする。

ばねの質量は無視でき、振動中はフックの法則が成り立つ範囲にある。また、おもりは大きさを無視できる質点として扱う。

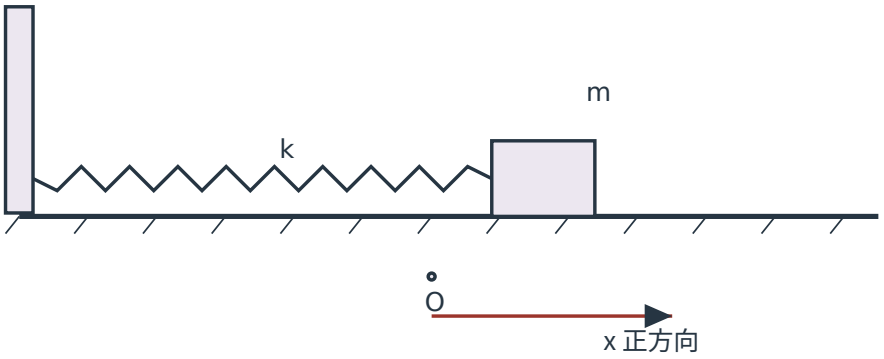

図 1　固定端・軽い理想ばね・質点・滑らかな水平面。O はつり合い位置。

図の O はおもりのつり合い位置を表す。つり合い位置から右向きを正方向とし、おもりの変位を x とする。

ここでいう変位 x は、ばねの自然長からの伸びをそのまま表すとは限らず、**つり合い位置を基準にした符号付きの位置の差**である。

水平方向について、おもりにはばねの復元力

$$F = -kx$$

が働く。$k > 0$ はばね定数であり、単位は $\mathrm{N/m}$ である。

おもりが右側にあれば $x > 0$ で、ばねの力は左向きである。左側にあれば $x < 0$ で、ばねの力は右向きとなる。

どちらの場合も、力はつり合い位置へ戻す向きに働く。

鉛直方向では、おもりに働く重力と床からの垂直抗力がつり合う。したがって、この水平振動の運動方程式には、それらの鉛直方向の力を加えない。

2.2 復元力から周期を導く

運動方程式 $ma = F$ を水平方向に立てると、

$$ma = -kx$$

となる。

両辺を質量 m で割ると、

$$a = -\frac{k}{m}x$$

である。

第 042 講では、つり合い位置からの変位に比例し、その反対向きに加速度が生じる運動を単振動として扱った。

単振動の加速度は

$$a = -\omega^2 x$$

と表される。

両式を比較すれば、

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

となる。角振動数は正の値を取るため、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。

これを $T = 2\frac{\pi}{\omega}$ に代入すると、ばね振り子の周期が求まる。

理想ばね振り子の周期

固定端をもつ軽い理想ばねと質点からなり、摩擦・抵抗がなく、フックの法則が振動の全範囲で成り立つ場合、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

である。

- T：周期（s）
- m：質点の質量（kg）
- k：ばね定数（N/m）

この条件では、周期は質量 m とばね定数 k によって決まる。

質量が大きいと、同じ力を受けたときの加速度が小さくなり、振動はゆっくりになる。

反対に、ばね定数が大きいと、同じ変位でも復元力が強くなり、振動は速くなる。

式から読み取れる関係は、

$$T \propto \sqrt{m}, \qquad T \propto \frac{1}{\sqrt{k}}$$

である。

したがって、k を一定にして質量を 4 倍にすると周期は 2 倍になる。m を一定にしてばね定数を 4 倍にすると周期は半分になる。

周期の変化は平方根で判断する

質量が 2 倍なら周期は $\sqrt{2}$ 倍であり、2 倍ではない。

ばね定数が 2 倍なら周期は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍である。

比較するときは、まず**どの量を変え、どの量を一定に保ったか**を確認する。

2.3 振幅を大きくすると周期は変わるか

振幅とは、つり合い位置から最も遠くまで離れたときの変位の大きさである。

理想ばね振り子の周期式には振幅が含まれていない。

したがって、同じ質量と同じばね定数で、フックの法則が成立する範囲内で振幅を 2 倍にしても、周期は変わらない。

ただし、これは理想的な線形ばねの性質である。大きく伸ばしたときにフックの法則が成り立たなくなる実際のばねや、抵抗の影響が無視できない振動にまで、無条件に当てはめてはならない。

2.4 ばねを鉛直につるす場合

ばねの上端を固定し、下端に質量 m のおもりをつるした場合を考える。

ここでもばねは軽く、フックの法則が成り立ち、抵抗を無視できるとする。ばねは振動中も自然長から伸びた状態を保つものとする。

自然長から鉛直下向きに測った位置を z とし、重力加速度の大きさを g とする。

おもりに働く力は、下向きの重力 mg と上向きのばねの力である。

つり合い位置における自然長からの伸びを z_0 とすると、

$$mg - kz_0 = 0$$

より、

$$z_0 = \frac{mg}{k}$$

である。

今度はつり合い位置を原点とし、下向きを正にした変位を x とする。

自然長からの伸びは $z = z_0 + x$ なので、運動方程式は

$$\begin{aligned} ma &= mg - k(z_0 + x) \\ &= (mg - kz_0) - kx \\ &= -kx \end{aligned}$$

となる。

重力と、つり合い位置でのばねの力が打ち消し合い、残るのは変位 x に比例する復元力である。

鉛直ばねでも周期の式は同じ

理想ばね振り子では、つり合い位置からの変位 x を用いれば、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となり、水平配置と同じ周期式が使える。

重力加速度 g は自然長からのつり合い位置を変えるが、理想線形ばねの周期式には現れない。

このことは「重力が働いていない」という意味ではない。重力は常に働いているが、つり合い位置を基準に運動を調べることで、振動を生み出す合力が $-kx$ と表されるのである。

3. 単振り子の周期

3.1 糸でつるしたおもりの運動

次に、軽くて伸びない糸の一端を固定し、もう一端に質量 m の小さなおもりを取り付ける。

支点は動かず、糸の質量と空気抵抗を無視できるとする。おもりは質点として扱い、重力加速度 g は一定である。

このような理想化した振り子を**単振り子**という。

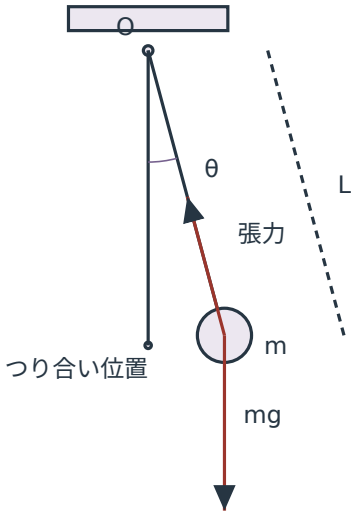

図 2　固定支点・伸びない軽い糸・質点。L は支点からおもり中心まで。

図の鉛直方向の細い実線は角度を測るための**基準線**であり、実際に 2 本目の糸が存在するわけではない。実際のおもりは、斜めになった 1 本の糸で支えられている。

図の角度は 15° の幾何学的な例であり、この角度なら任意の精度で小振幅近似が成立することを保証するものではない。

記号は次のように定める。

- L：支点からおもりの中心までの長さ（m）
- θ：鉛直下向きを基準にした符号付きの角度（rad）
- s：つり合い位置から円弧に沿って測った符号付きの変位（m）
- m：おもりの質量（kg）
- g：重力加速度の大きさ（$\mathrm{m/s^2}$）

角度は右側へ傾く向きを正とする。

ここで L は見えている糸の部分だけの長さではなく、支点から質点の中心までの距離である。

3.2 接線方向に働く力を調べる

単振り子のおもりには、重力 mg と糸の張力が働く。

おもりは支点を中心とする円弧上を動くため、運動方向に沿った**接線方向**と、支点を結ぶ**半径方向**を区別して考える。

張力は糸に沿って支点へ向かうため、接線方向の成分を持たない。

一方、重力には接線方向の成分があり、この成分がおもりをつり合い位置へ戻そうとする。

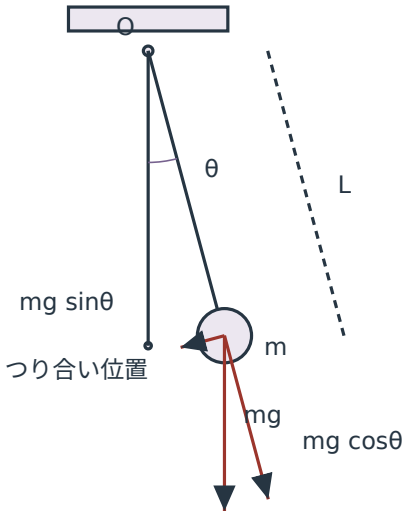

図 3　重力の成分分解。成分は別の追加の力ではない。接線方向だけを運動式へ。

この図でも鉛直の細線は角度の基準線であり、2 本目の糸ではない。

図の $mg\sin\theta$ と $mg\cos\theta$ は、重力を接線方向と半径方向に分けて表したものである。

重力 mg とその 2 つの成分を、合計 3 つの独立した力として加えてはならない。

$\theta > 0$ のとき、重力の接線方向成分は負方向、すなわちつり合い位置へ戻る方向である。

接線方向の正の向きを θ が増える向きとすると、符号を含む接線方向の合力は

$$F_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$$

となる。

これは $\theta < 0$ のときにも符号付きの関係として成り立つ。

接線方向の運動方程式は、

$$ma_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$$

である。

ここで扱っているのは接線方向の運動方程式である。半径方向について合力が 0 であると仮定しているわけではない。

おもりが動いているときには、円弧に沿った運動に必要な半径方向の加速度も存在する。張力と重力の半径方向成分は、その運動に対応している。

3.3 円弧に沿った変位を使う

おもりが鉛直下向きの位置から角度 θ だけ傾いたとする。

糸の長さが一定なので、おもりは半径 L の円弧に沿って動く。

ラジアンで表した角度と円弧の長さの関係から、符号付きの接線変位 s は

$$s = L\theta$$

である。

したがって、

$$\theta = \frac{s}{L}$$

となる。

円弧の変位と横方向の変位は異なる

円弧に沿った変位は $s = L\theta$ である。

一方、鉛直線から測った水平方向の変位は $L\sin\theta$ である。

一般にこの 2 つは等しくない。角度が小さいときに近い値になることと、厳密に同じ量であることを区別する。

3.4 小さい角度での近似

振れ幅が十分に小さいとき、角度をラジアンで表せば、

$$\sin\theta \approx \theta$$

と近似できる。

これは任意の角度で使える等式ではなく、$|\theta|$ が十分小さい場合の近似である。

接線方向の運動方程式

$$ma_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$$

に、この近似を用いると、

$$\begin{aligned} ma_{\text{接線}} &\approx -mg\theta \\ &= -mg\frac{s}{L} \end{aligned}$$

となる。

質量 m で割れば、

$$a_{\text{接線}} \approx -\frac{g}{L}s$$

である。

これは、接線方向の加速度が、つり合い位置からの円弧に沿った変位にほぼ比例し、その反対向きに生じることを表す。

単振動の関係

$$a = -\omega^2 s$$

と比較すると、小振幅の近似のもとで、

$$\omega^2 \approx \frac{g}{L}$$

となる。

したがって、

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{L}}$$

であり、$T = 2\frac{\pi}{\omega}$ より周期を求められる。

単振り子の小振幅での周期

固定支点、伸びない軽い糸、質点、一定の重力加速度、抵抗なしという理想条件のもとで、振れ角が十分に小さい場合、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

となる。

- T：周期（s）
- L：支点から質点中心までの長さ（m）
- g：重力加速度の大きさ（$\mathrm{m/s^2}$）

この近似式では、おもりの質量 m は周期を決める量に含まれない。

3.5 なぜおもりを重くしても周期が変わらないのか

単振り子の接線方向の運動方程式は、

$$ma_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$$

である。

左右両辺に質量 m が含まれるため、$m > 0$ として割ると、

$$a_{\text{接線}} = -g\sin\theta$$

となる。

同じ角度であれば、理想条件では質量を変えても接線方向の加速度は変わらない。

そのため、小振幅での周期は質量によらないのである。

一方、糸を長くすると、同じ角度だけ振れる際におもりが動く円弧も長くなり、周期は大きくなる。

式からは、

$$T \propto \sqrt{L}, \qquad T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

が読み取れる。

糸の長さを 4 倍にすれば周期は 2 倍になり、重力加速度を 4 倍にすれば周期は半分になる。

4. 2 種類の振動を比較する

ここまでの結果を、同じ観点で比較する。

比較する量	理想ばね振り子	単振り子（小振幅近似）
周期の式	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
質量 m	平方根に比例	影響しない
ばね定数 k	平方根に反比例	該当しない
糸の長さ L	該当しない	平方根に比例
重力加速度 g	理想線形条件で周期に影響しない	平方根に反比例
振幅	フックの法則が成り立つ範囲で影響しない	十分小さい振幅では近似的に影響しない

ばね振り子と単振り子は、ともに復元力によって往復する。しかし、復元力と変位の関係が異なるため、周期を決める量も異なる。

ばね振り子の復元力は、つり合い位置からの変位 x に対して厳密に $-kx$ と表される理想条件を採用した。

一方、単振り子の接線方向の力は厳密には $-mg\sin\theta$ であり、小さい角度で $\sin\theta \approx \theta$ と近似することによって単振動の式に近づけている。

したがって、**ばね振り子の周期式は理想線形条件で成り立つ式であり、単振り子の周期式はさらに小振幅近似を必要とする式**である。

4.1 条件を変えたときの周期の倍率

周期の倍率は、変更前後の式を割って求めると分かりやすい。

ばね振り子で変更前の質量とばね定数を m_1, k_1、変更後を m_2, k_2 とすると、

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2 k_1}{m_1 k_2}}$$

である。

単振り子では、変更前の糸の長さと重力加速度を L_1, g_1、変更後を L_2, g_2 とすると、小振幅近似のもとで、

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \sqrt{\frac{L_2 g_1}{L_1 g_2}}$$

となる。

比較の際は、変更した量だけでなく、変更していない量も確認する必要がある。

例えば質量を 2 倍にしてばね定数も 2 倍にする場合、ばね振り子の周期は変わらない。

4.2 小振幅近似はどの程度の角度で使えるか

小角近似 $\sin\theta \approx \theta$ がどの程度よい近似かは、両者の比を調べると判断しやすい。

例えば角度 5° は、ラジアンでは

$$5^\circ = \frac{5\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{36}\,\mathrm{rad} \approx 0.087266\,\mathrm{rad}$$

である。

このとき、

$$\sin 5^\circ \approx 0.087156$$

なので、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx 0.9987$$

となる。

一方、30° では、

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} \approx 0.523599\,\mathrm{rad}$$

であり、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \frac{0.500000}{0.523599} \approx 0.9549$$

となる。

角度が大きくなるほど、$\sin\theta$ を θ で置き換えた際の違いが大きくなることが分かる。

振れ角	ラジアンでの値	$\sin\frac{\theta}{\theta}$	1 からの差
5°	約 0.087266	約 0.9987	約 0.0013
30°	約 0.523599	約 0.9549	約 0.0451

この表の差は、**接線方向の復元力に用いる小角近似の違い**を示すものである。周期の相対誤差が、そのまま表の差に等しいという意味ではない。

また、15° などの特定の角度について、どのような用途でも十分な精度が保証されるわけではない。必要とする精度に応じて近似の妥当性を判断する必要がある。

大きな振れ角に周期一定を拡張しない

単振り子の振れ角が大きくなると、$\sin\theta \approx \theta$ の近似が十分でなくなる。

したがって、$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ を、任意の振幅で厳密に成り立つ式として扱うことはできない。

本講では、大振幅での正確な周期を求める方法までは扱わない。

---

5. 例題で周期を判断する

例題 1

滑らかな水平面上に、固定端をもつ軽い理想ばねと質点からなるばね振り子がある。摩擦と空気抵抗を無視でき、振動の全範囲でフックの法則が成立する。

質点の質量を $m = 0.50\,\mathrm{kg}$、ばね定数を $k = 50\,\mathrm{N/m}$ とする。円周率は π を用いる。

例題 1(1) この振り子の角振動数 ω、周期 T、振動数 f を求めよ。

例題 1(2) ばね定数を変えず、質量だけを $2.0\,\mathrm{kg}$ にした。周期を求め、変更前の何倍になるか答えよ。

例題 1(3) 質量を最初の $0.50\,\mathrm{kg}$ に戻し、ばね定数だけを $200\,\mathrm{N/m}$ にした。周期を求め、最初の周期と比較せよ。

例題 1(4) 最初の $m = 0.50\,\mathrm{kg}$、$k = 50\,\mathrm{N/m}$ のばね振り子を、上端固定の鉛直配置にした。重力加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とし、ばねは自然長から伸びた状態で振動する。自然長からのつり合いの伸びと周期を求めよ。

例題 1 の解答・解説

例題 1(1) ばね振り子の角振動数は、

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{50\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}} \\ &= 10\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

である。

周期は、

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{10}\,\mathrm{s} \\ &= 0.2\pi\,\mathrm{s} \\ &\approx 0.628\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

となる。

振動数は、

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{0.2\pi\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{5}{\pi}\,\mathrm{Hz} \\ &\approx 1.59\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

である。

例題 1(2) 質量は 0.50 kg から 2.0 kg へ 4 倍になった。

ばね定数は変わらないので、周期の倍率は

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{2.0\,\mathrm{kg}}{0.50\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{4} = 2$$

である。

したがって、

$$T_2 = 2(0.2\pi\,\mathrm{s}) = 0.4\pi\,\mathrm{s} \approx 1.257\,\mathrm{s}$$

となる。

質量 4 倍で周期は 2 倍である。

例題 1(3) ばね定数は 50 N/m から 200 N/m へ 4 倍となった。

質量は変わらないため、

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{\frac{50\,\mathrm{N/m}}{200\,\mathrm{N/m}}} = \frac{1}{2}$$

である。

よって、

$$T_3 = \frac{1}{2}(0.2\pi\,\mathrm{s}) = 0.1\pi\,\mathrm{s} \approx 0.314\,\mathrm{s}$$

となる。

ばね定数 4 倍で周期は半分である。

例題 1(4) 鉛直配置では、つり合い位置で重力とばねの力がつり合う。

自然長からのつり合いの伸びを z_0 とすると、

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{50\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.098\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

周期はつり合い位置からの変位を用いることで水平配置と同じ式になり、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.50\,\mathrm{kg}}{50\,\mathrm{N/m}}} = 0.2\pi\,\mathrm{s} \approx 0.628\,\mathrm{s}$$

となる。

変更前後を整理すると次のようになる。

条件	質量 m	ばね定数 k	周期	最初との比較
最初の水平配置	$0.50\,\mathrm{kg}$	$50\,\mathrm{N/m}$	$0.2\pi\,\mathrm{s}$	1 倍
質量だけ 4 倍	$2.0\,\mathrm{kg}$	$50\,\mathrm{N/m}$	$0.4\pi\,\mathrm{s}$	2 倍
ばね定数だけ 4 倍	$0.50\,\mathrm{kg}$	$200\,\mathrm{N/m}$	$0.1\pi\,\mathrm{s}$	$\frac{1}{2}$倍
鉛直配置	$0.50\,\mathrm{kg}$	$50\,\mathrm{N/m}$	$0.2\pi\,\mathrm{s}$	1 倍

鉛直配置では重力によってつり合い位置が変わるが、理想線形ばねの周期は変わらない。

例題 2

固定支点と伸びない軽い糸、質点からなる単振り子を考える。空気抵抗を無視し、振れ角は十分に小さいものとする。

支点から質点中心までの長さを $L = 1.0\,\mathrm{m}$、重力加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

例題 2(1) この振り子の周期を小振幅近似で求めよ。

例題 2(2) 糸の長さだけを $4.0\,\mathrm{m}$ にした。周期を求め、変更前の何倍か答えよ。

例題 2(3) 長さと重力加速度を最初の値に戻し、おもりの質量だけを 4 倍にした。周期はどうなるか。理由も説明せよ。

例題 2(4) 質量と長さを最初の値に戻し、重力加速度の大きさだけを 4 倍にした。周期はどうなるか答えよ。

いずれも振れ角は十分に小さく、理想条件を保つものとする。

例題 2 の解答・解説

例題 2(1) 小振幅での単振り子の周期は、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

である。

数値を代入すると、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{1.0\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}}$$

$$\approx 2.007\,\mathrm{s}$$

となる。

周期は約 $2.01\,\mathrm{s}$ である。

例題 2(2) 長さが 4 倍、重力加速度は一定なので、

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \sqrt{\frac{4.0\,\mathrm{m}}{1.0\,\mathrm{m}}} = 2$$

となる。

よって、

$$T_2 \approx 2(2.007\,\mathrm{s}) \approx 4.014\,\mathrm{s}$$

である。

糸の長さを 4 倍にすると、周期は約 2 倍になる。

例題 2(3) 質量だけを 4 倍にしても、周期は変わらない。

小振幅での周期式に質量が含まれていないためである。

また、運動方程式 $ma_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$ では質量が両辺に共通しており、質量を増やしても同じ角度での接線加速度が変わらない。

したがって、

$$T_3 \approx 2.007\,\mathrm{s}$$

である。

例題 2(4) 重力加速度が 4 倍、長さが一定なので、

$$\frac{T_4}{T_1} \approx \sqrt{\frac{g}{4g}} = \frac{1}{2}$$

となる。

したがって、

$$T_4 \approx \frac{1}{2}(2.007\,\mathrm{s}) \approx 1.004\,\mathrm{s}$$

である。

条件	糸の長さ	重力加速度	周期の近似値	最初との比較
最初	$1.0\,\mathrm{m}$	$9.8\,\mathrm{m/s^2}$	$2.007\,\mathrm{s}$	1 倍
長さだけ 4 倍	$4.0\,\mathrm{m}$	$9.8\,\mathrm{m/s^2}$	$4.014\,\mathrm{s}$	2 倍
質量だけ 4 倍	$1.0\,\mathrm{m}$	$9.8\,\mathrm{m/s^2}$	$2.007\,\mathrm{s}$	1 倍
重力加速度だけ 4 倍	$1.0\,\mathrm{m}$	$39.2\,\mathrm{m/s^2}$	$1.004\,\mathrm{s}$	$\frac{1}{2}$倍

質量の変化と重力加速度の変化を混同してはならない。重力が強くなることと、同じ重力加速度のもとでおもりを重くすることは別の条件変更である。

例題 3

単振り子について、小角近似 $\sin\theta \approx \theta$ の妥当性を考える。

角度はラジアンで扱い、$\pi \approx 3.14159$ とする。また、

$$\sin 5^\circ \approx 0.087156, \qquad \sin 30^\circ = 0.500000$$

を用いてよい。

例題 3(1) 振れ角 5° と 30° をラジアンに直せ。

例題 3(2) それぞれについて $\sin\frac{\theta}{\theta}$ を求め、どちらの角度の方が $\sin\theta \approx \theta$ に近いか答えよ。

例題 3(3) 30° の単振り子について、周期が振幅に全く依存しないと断定できるか。理由を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

例題 3(1) 度からラジアンへの換算には、

$$180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$$

を使う。

したがって、

$$\begin{aligned} 5^\circ &= \frac{\pi}{36}\,\mathrm{rad} \\ &\approx 0.087266\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} 30^\circ &= \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} \\ &\approx 0.523599\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

である。

例題 3(2) 5° では、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \frac{0.087156}{0.087266} \approx 0.9987$$

となる。

30° では、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \frac{0.500000}{0.523599} \approx 0.9549$$

となる。

1 に近いのは 5° の方である。

したがって、5° の方が $\sin\theta \approx \theta$ によく一致する。

例題 3(3) 断定できない。

単振り子の周期が振幅に依存しないという結果は、振れ角が十分に小さく、$\sin\theta \approx \theta$ がよく成り立つ場合の近似である。

30° ではこの近似に無視できない差が生じる可能性があるため、周期式を厳密な式として扱うことはできない。

なお、$\sin\frac{\theta}{\theta}$ と 1 との差は、小角近似による接線方向の力の違いを示すものであり、周期の誤差そのものを直接与えるものではない。

演習問題

演習 1

あるおもりが、右端と左端の間を周期的に往復運動している。

時刻と運動状態を調べたところ、次のようになった。

時刻	おもりの状態
$0.00\,\mathrm{s}$	右端で一瞬停止
$0.25\,\mathrm{s}$	中央を左向きに通過
$0.50\,\mathrm{s}$	左端で一瞬停止
$0.75\,\mathrm{s}$	中央を右向きに通過
$1.00\,\mathrm{s}$	右端で一瞬停止

この運動は同じ状態を周期的に繰り返すものとする。

演習 1(1) 周期 T を求めよ。

演習 1(2) 振動数 f を求めよ。

演習 1(3) 角振動数 ω を求めよ。

演習 1(4) 時刻 $0.25\,\mathrm{s}$ と $0.75\,\mathrm{s}$ はどちらも中央を通過する時刻である。この 2 時刻の間を 1 周期と呼べない理由を説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習 1 の解答・解説」を参照。

演習 2

固定端をもつ理想ばね振り子を滑らかな水平面上で振動させる。質点の質量は $0.80\,\mathrm{kg}$、ばね定数は $20\,\mathrm{N/m}$ である。

摩擦と空気抵抗はなく、ばねは振動の全範囲でフックの法則に従う。

演習 2(1) 角振動数と周期を求めよ。

演習 2(2) 質量を一定に保ち、ばね定数だけを 2 倍にした。周期は何倍になるか。また、変更後の周期を求めよ。

演習 2(3) 元の質量とばね定数に戻したうえで、振幅だけを 2 倍にした。周期はどうなるか。条件とともに説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習 2 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習 3

質量 m、ばね定数 k の理想ばね振り子がある。

固定端・軽いばね・質点・摩擦なしという条件を保ち、フックの法則が成り立つ範囲で振動する。

最初の周期を T_0 とする。

次の変更をそれぞれ独立に行ったとき、周期が T_0 の何倍になるか求めよ。

条件	質量の変更	ばね定数の変更
A	4 倍	変更なし
B	変更なし	4 倍
C	2 倍	2 倍
D	2 倍	$\frac{1}{2}$倍

演習 3(1) 条件 A の場合を求めよ。

演習 3(2) 条件 B の場合を求めよ。

演習 3(3) 条件 C の場合を求めよ。

演習 3(4) 条件 D の場合を求めよ。

解答・解説は末尾の「演習 3 の解答・解説」を参照。

演習 4

軽い理想ばねを鉛直につるし、下端に質量 $0.60\,\mathrm{kg}$ の質点を取り付けた。

ばね定数は $30\,\mathrm{N/m}$、重力加速度は $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

ばねは自然長から伸びた状態で振動し、抵抗はなく、フックの法則が成立する範囲にある。

演習 4(1) 自然長からのつり合いの伸びを求めよ。

演習 4(2) このばね振り子の周期を求めよ。

演習 4(3) 同じばねと質点を、重力加速度が $5.0\,\mathrm{m/s^2}$ の場所で鉛直に振動させた。つり合いの伸びと周期がそれぞれどうなるか求めよ。

解答・解説は末尾の「演習 4 の解答・解説」を参照。

演習 5

固定支点、伸びない軽い糸、質点からなる単振り子を考える。空気抵抗はなく、振れ角は十分に小さい。

糸の長さは、支点から質点中心まで $0.49\,\mathrm{m}$、重力加速度は $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である。

演習 5(1) 小振幅近似による周期を求めよ。

演習 5(2) 糸の長さだけを $0.98\,\mathrm{m}$ にした。周期は元の何倍か。また、変更後の周期を求めよ。

演習 5(3) 長さと重力加速度を最初の値に戻し、質点の質量だけを 3 倍にした。周期がどうなるか説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習 5 の解答・解説」を参照。

演習 6

長さ $L = 1.20\,\mathrm{m}$ の軽く伸びない糸の先に、質量 $m = 0.20\,\mathrm{kg}$ の質点を取り付けた単振り子がある。

支点は固定されており、重力加速度は $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、空気抵抗はない。

質点が鉛直下向きから右側へ 15° 傾いた瞬間を考える。鉛直下向きから右へ傾く向きを角度の正方向とする。

計算には、

$$\sin 15^\circ \approx 0.258819, \qquad 15^\circ = \frac{\pi}{12}\,\mathrm{rad}$$

を用いてよい。

演習 6(1) 質点に働く実際の力をすべて挙げ、それぞれの向きを説明せよ。

演習 6(2) この瞬間の接線方向の合力を、符号と単位を付けて求めよ。

演習 6(3) つり合い位置から質点までの円弧に沿った変位 s と、水平方向の変位を求めよ。両者が厳密には同じでないことも示せ。

演習 6(4) 振り子がつり合い位置を速さをもって通過する瞬間について、接線方向の合力が 0 だから半径方向の合力も 0 であると判断してよいか。理由を説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習 6 の解答・解説」を参照。

©ミライコーチング

演習 7

理想ばね振り子と、小振幅で振動する理想単振り子について、最初の周期をそれぞれ T_0 とする。

それぞれの変更では、指定された量以外を一定に保ち、理想条件と必要な近似条件は引き続き成り立つものとする。

演習 7(1) ばね振り子の質量だけを 2 倍にした。周期は何倍になるか。

演習 7(2) 単振り子の糸の長さだけを 2 倍にした。周期は何倍になるか。

演習 7(3) 単振り子の重力加速度だけを 4 倍にした。周期は何倍になるか。

演習 7(4) 単振り子の質量を 4 倍にした場合と、ばね振り子の質量を 4 倍にした場合を比較し、周期の変化が異なる理由を説明せよ。

解答・解説は末尾の「演習 7 の解答・解説」を参照。

演習 8

小振幅近似の意味を確認するため、単振り子の角度 θ と $\sin\theta$ を比較する。

次の数値を使ってよい。

振れ角	θ（rad）	$\sin\theta$
5°	0.087266	0.087156
30°	0.523599	0.500000

演習 8(1) 5° と 30° のそれぞれについて、$\sin\dfrac{\theta}{\theta}$ を求めよ。

演習 8(2) どちらの角度の方が $\sin\theta \approx \theta$ に近いか説明せよ。また、この比と 1 との差が周期の相対誤差そのものであると判断してよいか答えよ。

演習 8(3) 振れ角が大きい単振り子に、$T \approx 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ を厳密な周期式として使ってよいか。理由を説明せよ。

演習 8(4) 次の 2 つの説明が正しいかを判断し、それぞれ理由を述べよ。

- A：「どのようなばねでも、振幅を大きくしても周期は絶対に変わらない。」
- B：「十分小さい振幅で振動する理想単振り子では、周期は近似的に振幅によらない。」

解答・解説は末尾の「演習 8 の解答・解説」を参照。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 周期は $1.00\,\mathrm{s}$ である。

時刻 $0.00\,\mathrm{s}$ に右端で停止していたおもりは、時刻 $1.00\,\mathrm{s}$ に再び右端へ戻る。

この間に右端から左端へ進み、さらに右端へ戻る一往復を終えている。

したがって、

$$T = 1.00\,\mathrm{s}$$

である。

演習 1(2) 振動数は、

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{1.00\,\mathrm{s}} \\ &= 1.00\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

となる。

演習 1(3) 角振動数は、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{1.00\,\mathrm{s}} \\ &= 2\pi\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

である。

演習 1(4) 時刻 $0.25\,\mathrm{s}$ では中央を左向きに、時刻 $0.75\,\mathrm{s}$ では中央を右向きに通過している。

位置は同じでも運動の向きが異なるため、同じ運動状態へ戻っていない。

したがって、この 2 時刻の間を 1 周期と呼ぶことはできない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) 角振動数は、

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{20\,\mathrm{N/m}}{0.80\,\mathrm{kg}}} \\ &= 5.0\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

である。

周期は、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{5.0\,\mathrm{rad/s}} \\
&= \frac{2\pi}{5}\,\mathrm{s} \\
&\approx 1.257\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

となる。

演習 2(2) ばね定数が 2 倍で、質量は一定である。

周期はばね定数の平方根に反比例するため、

$$
\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

となる。

したがって変更後の周期は、

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi}{5}\,\mathrm{s} \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{s} \\
&\approx 0.889\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

である。

周期は元の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になる。

演習 2(3) 周期は変わらない。

理想ばね振り子の周期は、

$$
T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}
$$

で決まり、振幅は含まれない。

ただし、この結論は振幅を 2 倍にしてもフックの法則が成り立ち、摩擦や抵抗を無視できるという条件のもとで成立する。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) 条件 A では質量が 4 倍、ばね定数は一定である。

$$\frac{T_A}{T_0} = \sqrt{4} = 2$$

したがって、周期は 2 倍である。

演習 3(2) 条件 B では質量が一定、ばね定数が 4 倍である。

$$\frac{T_B}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

したがって、周期は半分になる。

演習 3(3) 条件 C では質量もばね定数も 2 倍である。

$$\frac{T_C}{T_0} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

したがって、周期は変わらない。

演習 3(4) 条件 D では質量が 2 倍、ばね定数が $\frac{1}{2}$ 倍である。

$$\frac{T_D}{T_0} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{4} = 2$$

したがって、周期は 2 倍となる。

条件	質量の倍率	ばね定数の倍率	周期の倍率
A	4	1	2
B	1	4	$\frac{1}{2}$
C	2	2	1
D	2	$\frac{1}{2}$	2

質量とばね定数を同時に変える場合は、一方の変化だけを見て判断せず、$\frac{m}{k}$ の倍率を求めることが大切である。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 自然長からのつり合いの伸びを z_0 とすると、

$$kz_0 = mg$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{(0.60\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})}{30\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

演習 4(2) つり合い位置からの変位を使えば、鉛直ばね振り子の周期も

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

で求められる。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{0.60\,\mathrm{kg}}{30\,\mathrm{N/m}}} \\ &= 2\pi\sqrt{0.020\,\mathrm{s^2}} \\ &\approx 0.889\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

である。

演習 4(3) 重力加速度が $5.0\,\mathrm{m/s^2}$ になった場合、つり合いの伸びは、

$$\begin{aligned} {z_0}' &= \frac{(0.60\,\mathrm{kg})(5.0\,\mathrm{m/s^2})}{30\,\mathrm{N/m}} \\ &= 0.10\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

一方、周期の式には重力加速度が含まれない。

したがって、

$$T' \approx 0.889\,\mathrm{s}$$

であり、周期は元と同じである。

重力加速度を半分にすると、つり合いの伸びも半分になるが、理想線形ばねの周期は変わらない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 小振幅近似で、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

を用いる。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} T &\approx 2\pi\sqrt{\frac{0.49\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}}} \\ &= 2\pi\sqrt{0.050\,\mathrm{s^2}} \\ &\approx 1.405\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

となる。

演習 5(2) 糸の長さは $0.49\,\mathrm{m}$ から $0.98\,\mathrm{m}$ に 2 倍となった。

重力加速度は一定なので、

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \sqrt{2}$$

である。

変更後の周期は、

$$\begin{aligned} T_2 &\approx \sqrt{2}(1.405\,\mathrm{s}) \\ &\approx 1.987\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、周期は約 $\sqrt{2}$ 倍である。

演習 5(3) 周期は変わらない。

理想単振り子の小振幅での周期式

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

には質量が含まれていない。

これは、接線方向の運動方程式で質量 m が両辺から消えるためである。

したがって、質量を 3 倍にしても、同じ長さ・同じ重力加速度・十分小さい振幅という条件では、周期は近似的に元と同じ約 $1.405\,\mathrm{s}$ となる。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1) 質点に働く実際の力は、鉛直下向きの重力 mg と、糸に沿って支点へ向かう張力である。

重力の接線方向成分と半径方向成分は、重力を分解して表したものであり、独立した別の力ではない。

演習 6(2) 接線方向の正の向きは、角度 θ が増える向きである。

質点は右側にあるため、接線方向の重力成分はつり合い位置へ戻す負方向となる。

したがって、

$$F_{\text{接線}} = -mg\sin\theta$$

である。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} F_{\text{接線}} &= -(0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})\sin 15^\circ \\ &\approx -(0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(0.258819) \\ &\approx -0.518\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

したがって、接線方向の合力は約 $-0.518\,\mathrm{N}$ である。

負号は、角度が小さくなる向き、すなわちつり合い位置へ戻る向きであることを表す。

演習 6(3) まず角度をラジアンで表す。

$$\theta = \frac{\pi}{12}\,\mathrm{rad} \approx 0.261799\,\mathrm{rad}$$

円弧に沿った変位は、

$$\begin{aligned} s &= L\theta \\ &= (1.20\,\mathrm{m})\frac{\pi}{12} \\ &= 0.10\pi\,\mathrm{m} \\ &\approx 0.314\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

一方、水平方向の変位は、

$$\begin{aligned} x &= L\sin\theta \\ &= (1.20\,\mathrm{m})\sin 15^\circ \\ &\approx (1.20\,\mathrm{m})(0.258819) \\ &\approx 0.311\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$s \approx 0.314\,\mathrm{m}, \qquad x \approx 0.311\,\mathrm{m}$$

となり、両者は厳密には同じではない。

円弧に沿った距離は曲がった経路の長さであり、水平方向の変位は鉛直の基準線から質点までの水平距離である。

演習 6(4) 判断してはならない。

つり合い位置では $\theta = 0$ なので、

$$F_{\text{接線}} = -mg\sin 0 = 0$$

となる。

しかし、おもりはその瞬間に円弧に沿って運動している。速さが 0 でなければ、向心加速度が必要であり、半径方向には支点へ向かう合力が働く。

したがって、接線方向の合力が 0 であることから、半径方向の合力まで 0 であるとは結論できない。

演習 7 の解答・解説

演習 7(1) ばね振り子では、ばね定数を一定にすると、

$$T \propto \sqrt{m}$$

である。

質量を 2 倍にするので、

$$\frac{T_2}{T_0} = \sqrt{2}$$

となる。

したがって周期は $\sqrt{2}$ 倍である。

演習 7(2) 単振り子では、小振幅近似のもとで、

$$T \propto \sqrt{L}$$

である。

糸の長さを 2 倍にすると、

$$\frac{T_2}{T_0} \approx \sqrt{2}$$

となる。

したがって周期は約 $\sqrt{2}$ 倍である。

演習 7(3) 単振り子では、

$$T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

である。

重力加速度を 4 倍にすると、

$$\frac{T_2}{T_0} \approx \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

となる。

したがって周期は約半分になる。

演習 7(4) 単振り子の質量を 4 倍にしても、小振幅での周期は変わらない。

一方、ばね振り子の質量を 4 倍にすると、周期は 2 倍になる。

単振り子では、接線方向の重力が質量に比例して大きくなる一方、運動方程式の左辺にも同じ質量が含まれるため、質量が消去される。

しかし、ばね振り子の復元力 $-kx$ は質量 m に直接比例しない。したがって、質量を増やすと同じ変位で生じる加速度が小さくなり、周期が長くなる。

この違いが、2 種類の振動で質量への依存が異なる理由である。

演習 8 の解答・解説

演習 8(1) 5° では、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \frac{0.087156}{0.087266}$$
$$\approx 0.9987$$

となる。

30° では、

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \approx \frac{0.500000}{0.523599}$$
$$\approx 0.9549$$

である。

演習 8(2) 5° の方が小角近似によく一致する。

5° の比は約 0.9987 で 1 に近いのに対し、30° では約 0.9549 となり、1 からの差が大きいためである。

ただし、この比と 1 との差を周期の相対誤差そのものと判断してはならない。

この比は $\sin\theta$ と θ の関係、すなわち復元力の小角近似の程度を表す。周期の誤差を直接表した値ではない。

演習 8(3) 厳密な周期式として使ってはならない。

単振り子の周期式

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

は、振れ角が十分に小さい場合に $\sin\theta \approx \theta$ と近似して導いた式である。

振れ角が大きくなると、この近似が十分でなくなるため、式を任意の振幅に対して厳密に適用することはできない。

演習 8(4) A は誤り、B は正しい。

A について、理想ばね振り子ではフックの法則が成り立つ範囲で周期は振幅によらない。しかし、どのような実際のばねでも同じとは限らない。

振幅が大きくなることでばねの力が変位に比例しなくなったり、抵抗などの影響が無視できなくなったりする場合には、理想ばね振り子の周期式をそのまま適用できない。

B について、固定支点・軽く伸びない糸・質点・一定の重力加速度・抵抗なしという理想条件で、振れ角が十分に小さければ、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

となる。

この近似式には振幅が含まれていないため、十分小さい振幅の範囲では、周期は近似的に振幅に依存しないと説明できる。

重要なのは、「振幅に依存しない」という言葉だけを覚えることではなく、その結論を導いた力の関係と近似条件を確認することである。