第 245 講 極座標

学習目標

- 平面上の点を、極からの距離と始線からの角で表せる。
- 偏角の正負と、同じ点を表す極座標が複数ある理由を説明できる。
- 極 O の極座標と、負の動径を許す場合の表示を正しく扱える。
- 極座標と直交座標を相互に変換できる。

1. 距離と向きで点を指定する

極座標

平面上に点 O と、O を端点とする半直線 OX を定める。O を**極**、半直線 OX を**始線**という。極でない点 P について、$OP=r$ とし、始線 OX から半直線 OP までの角を θ とする。このとき、点 P を (r,θ) と表し、これを P の**極座標**という。r を動径、θ を偏角という。

円と半直線の交点として読む

$r>0$ のとき、条件 $OP=r$ を満たす点は、極 O を中心とする半径 r の円上にある。一方、偏角 θ は極から出る半直線を 1 本選ぶ。この円と半直線の交点が点 P である。
したがって、(r,θ) は「横へ x、縦へ y」という指定ではない。「極から r だけ離れ、始線から θ だけ回した向きにある点」という指定である。

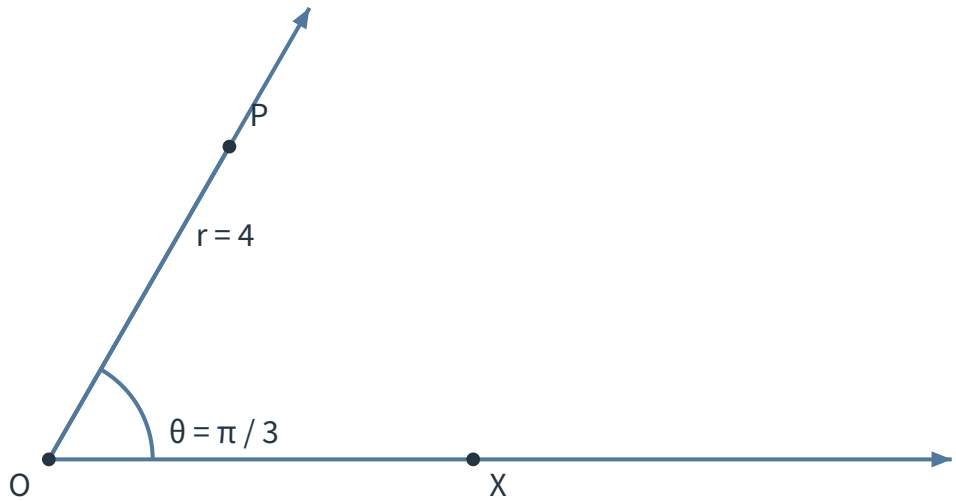

図 1　極座標 $P\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ の距離と偏角

例題 1：極座標から点を定める

極座標が $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ である点について、次の問いに答えよ。
(1) OP の長さを答えよ。
(2) 始線から半直線 OP まで、どちら向きに何度回転するか答えよ。

例題 1 の解答・解説

(1) 動径が $r = 4$ であるから、$OP = 4$ である。
(2) $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ である。正の角なので、始線から反時計回りに 60° 回転する。

2. 偏角の正負と周期

角の向きの約束

始線から反時計回りに測る角を正、時計回りに測る角を負とする。たとえば $\frac{\pi}{3}$ は反時計回りの 60°、$-\frac{\pi}{4}$ は時計回りの 45° である。
1 周は 2π であるから、θ と $\theta + 2k\pi$ は同じ向きの半直線を表す。ただし k は整数である。よって $r > 0$ のとき、
(r, θ) と $(r, \theta + 2k\pi)$ は、どの整数 k に対しても同じ点を表す。極座標は、一般に 1 つの点に対して 1 通りではない。

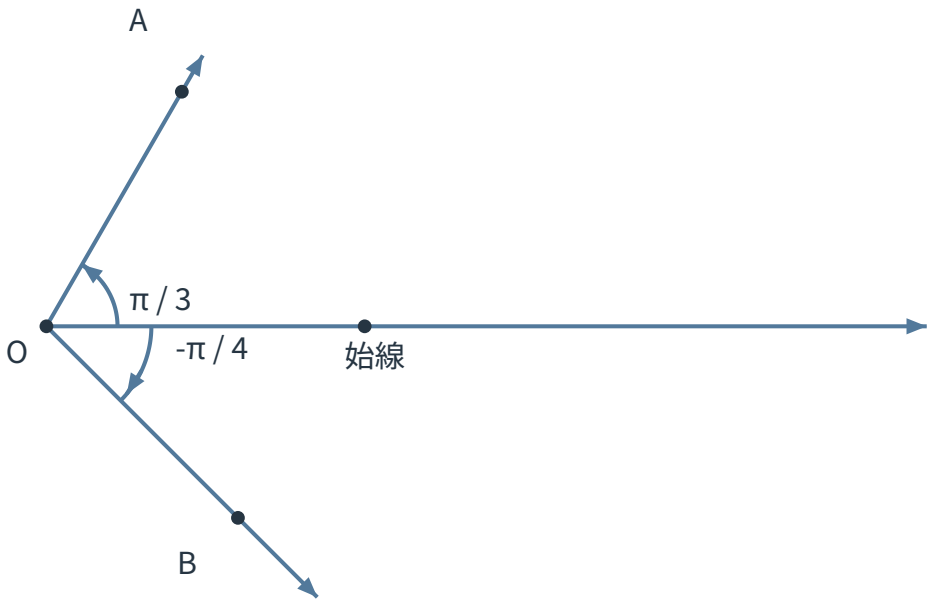

図 2　正の偏角と負の偏角は回転の向きが異なる

例題 2：同じ点を表す偏角

点 $P\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ と同じ点を表し、動径が 3 である極座標を、偏角が $0 \leq \theta < 2\pi$ のものと $-2\pi < \theta < 0$ のものについてそれぞれ 1 つずつ求めよ。

例題 2 の解答・解説

$0 \le \theta < 2\pi$ では、もとの表示 $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ が条件を満たす。
負の範囲では、偏角から 2π を引けばよい。

$$\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$$

したがって、求める極座標は $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$ と $\left(3, -\frac{7\pi}{6}\right)$ である。

偏角だけを変えてよい量

同じ正の動径を保つなら、偏角へ加えてよいのは 2π の整数倍である。π だけ加えると半直線が反対向きになり、別の点になる。

3. 負の動径と極の表示

負の動径は反対向きへ進む

動径を $r \ge 0$ に限る流儀では、点は正の距離と偏角で表す。一方、負の動径も許す流儀では、$(-r, \theta)$ は偏角 θ の半直線と反対向きへ距離 r だけ進んだ点を表す。$r > 0$ なら (r, θ) と $(-r, \theta + (2k+1)\pi)$ は、どの整数 k に対しても同じ点を表す。動径の符号を変えるときは、偏角へ奇数倍の π を加える必要がある。

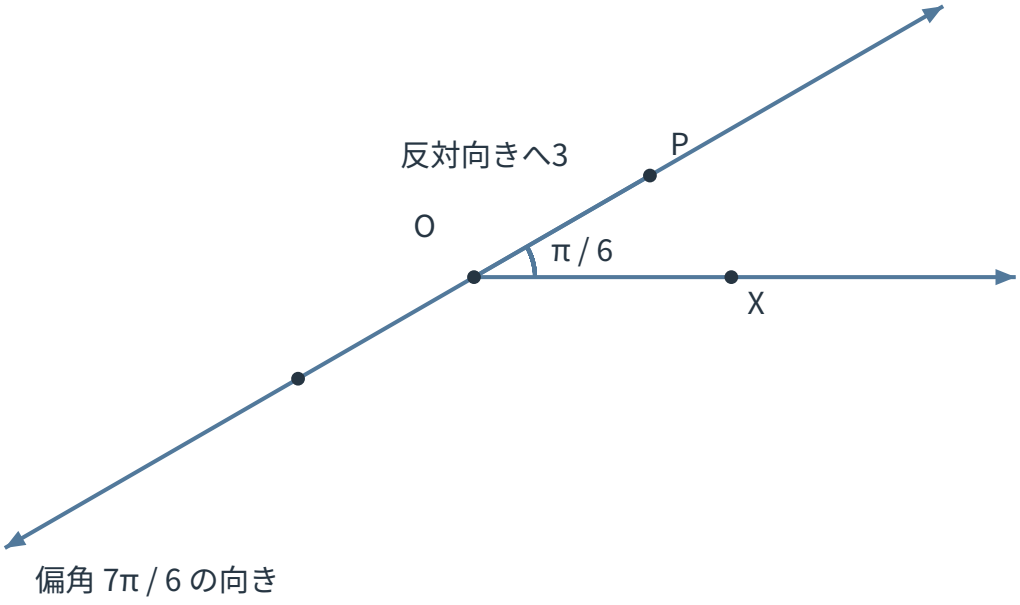

図 3　負の動径では偏角 $7\frac{\pi}{6}$ の向きと反対へ 3 進み、$P\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ に着く

極では偏角が定まらない

$r = 0$ なら、どの向きへ進もうとしても点は極 O のままである。したがって $(0, \theta)$ は θ の値によらず、すべて極 O を表す。極に対して偏角を 1 つに定めることはできない。

4. 直交座標との変換

射影から変換公式を作る

始線を直交座標の x 軸の正の向きとし、極を原点とする。点 P の極座標を (r,θ)、直交座標を (x,y) とする。まず $r \geq 0$ とする。長さ r の線分 OP を x 軸と y 軸の方向へ分けると、余弦と正弦の定義から

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

となる。これは象限にかかわらず成り立つ。負の動径を許す場合も、θ の向きと反対へ $|r|$ だけ進むことは、水平成分と鉛直成分の符号をともに反転することに対応するため、同じ 2 式が成り立つ。

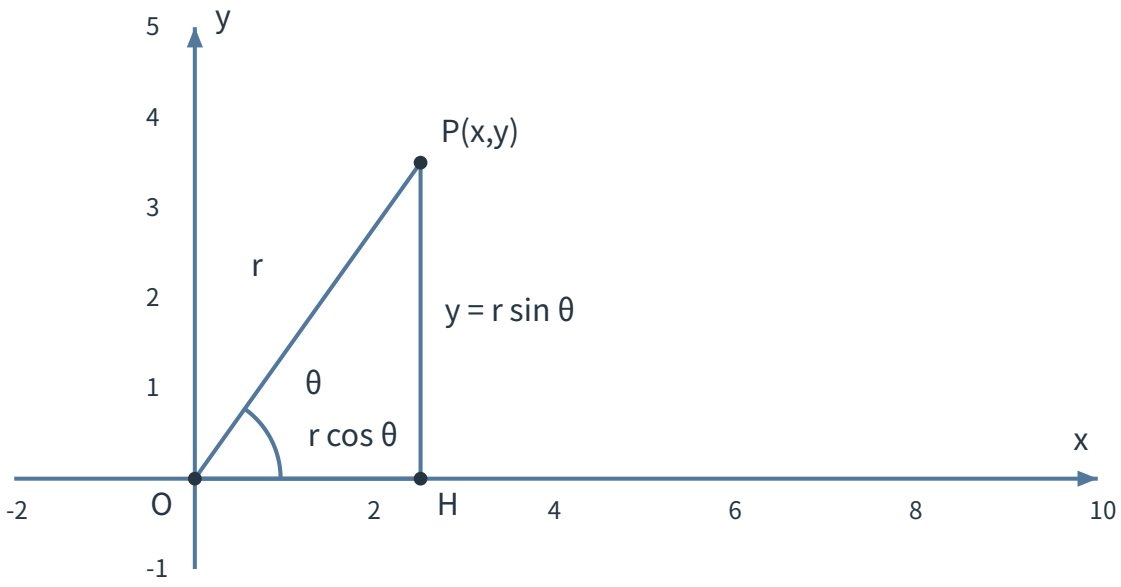

図 4　点 $P(r,\theta)$ の水平成分と鉛直成分

直交座標から動径と偏角を求める

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を 2 乗して加えると、

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2$$

を得る。$r \geq 0$ とすれば $r = \sqrt{x^2+y^2}$ である。$x \neq 0$ なら $\tan\theta = \frac{y}{x}$ も成り立つが、正接だけでは π だけ異なる角を区別できない。x, y の符号から点の象限を確認し、偏角を決める必要がある。$x = 0, y \neq 0$ のときは正接の式を使わず、点が正または負の y 軸上にあることから偏角を決める。$(x,y) = (0,0)$ は極であり、前節で述べたように偏角は定まらない。

例題 3：直交座標と極座標を変換する

次の問いに答えよ。ただし極座標では $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
(1) 極座標 $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ を直交座標に直せ。
(2) 直交座標 $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ を極座標に直せ。

例題 3 の解答・解説

(1) 変換公式へ代入すると、

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1, \qquad y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$$

である。したがって直交座標は $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ である。
(2) 動径は

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

である。また $x < 0, y < 0$ なので点は第 3 象限にある。基準となる角は $\frac{\pi}{6}$ であるから、$0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす偏角は $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ である。よって極座標は $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ である。

逆正接だけで偏角を決めない

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ を満たす角は π ごとに繰り返す。たとえば $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ と $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ では $\frac{y}{x}$ がどちらも $\frac{1}{\sqrt{3}}$ になるが、点は反対の象限にある。必ず x, y の符号と座標軸上の場合を確認する。

5. 演習

演習 1：偏角の向き

極座標 $A\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$ について、極からの距離と、始線から半直線 OA までの回転の向き・大きさを答えよ。

演習 2：同じ点の極座標

点 $P\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$ と同じ点を表す極座標を、次の条件でそれぞれ 1 つ求めよ。
(1) 動径が 4、偏角が $2\pi < \theta < 4\pi$
(2) 負の動径を許し、動径が -4、偏角が $0 \leq \theta < 2\pi$

演習 3：極の表示

極座標 $(0, -5\pi)$ と $\left(0, \frac{3\pi}{7}\right)$ が表す点を答え、その理由を説明せよ。

演習 4：極座標から直交座標へ

次の極座標を直交座標に直せ。
(1) $\left(6, \frac{5\pi}{6}\right)$
(2) $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

演習 5：直交座標から極座標へ

次の直交座標を、$r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす極座標に直せ。
(1) $\left(1, -\sqrt{3}\right)$
(2) $(0, -5)$

演習 6：表示と変換を確かめる

点 P の極座標が $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$ である。
(1) P と同じ点を表し、動径が正で $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす極座標を求めよ。
(2) P の直交座標を求めよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

動径が 5 であるから、極からの距離は 5 である。偏角 $-\frac{2\pi}{3}$ は負なので、始線から時計回りに $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ 回転する。

演習 2 の解答・解説

(1) 動径を変えずに同じ点を表すには、偏角へ 2π の整数倍を加える。$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ は指定された範囲にある。よって $\left(4, \frac{9\pi}{4}\right)$ である。
(2) 動径の符号を変えるときは、偏角へ π を加える。したがって $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ より、$\left(-4, \frac{5\pi}{4}\right)$ である。偏角 $\frac{5\pi}{4}$ の反対向きへ距離 4 進むため、もとの点に到達する。

演習 3 の解答・解説

どちらも極 O を表す。動径が 0 なら、偏角がどの値でも極から移動しないからである。

演習 4 の解答・解説

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より、

$$x = 6\cos\frac{5\pi}{6} = -3\sqrt{3}, \qquad y = 6\sin\frac{5\pi}{6} = 3$$

である。よって $\left(-3\sqrt{3}, 3\right)$ である。
(2) 同様に、

$$x = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \qquad y = 3\sin\frac{3\pi}{2} = -3$$

である。よって $(0, -3)$ である。

演習 5 の解答・解説

(1) 動径は $r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ である。$x > 0, y < 0$ なので第 4 象限にあり、基準となる角は $\frac{\pi}{3}$ である。したがって偏角は $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ であり、極座標は $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ である。
(2) 動径は $r = 5$ である。点は負の y 軸上にあるため、偏角は $\frac{3\pi}{2}$ である。よって極座標は $\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$ である。

演習 6 の解答・解説

(1) 動径の符号を正に変えるので、偏角へ π を加える。

$$\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

したがって、求める極座標は $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$ である。
(2) 正の動径の表示を使うと、

$$x=2\cos\frac{4\pi}{3}=-1,\qquad y=2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

である。よって直交座標は $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ である。もとの負の動径を直接使っても $x=-2\cos\frac{\pi}{3}=-1$、$y=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$ となり一致する。