第 203 講 置換積分の考え方

学習目標

この講では、置換積分を計算手順として覚える前に、なぜ変数を置き換えると積分しやすくなるのかを理解することを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 合成関数の微分を逆向きに利用して、置換する部分を判断できる。
- 内側の関数の微分が必要になる理由を説明できる。
- $t = g(x)$ という置換が単なる文字変更ではなく、変化の対応を表すことを理解できる。
- 簡単な不定積分で置換の考え方を利用できる。

置換積分は式の見方を変える考え方

積分では、式全体をそのまま見るのではなく、まとまりに注目することが重要である。
例えば、$2x(x^2+1)^3$ では、(x^2+1) が内側のまとまりになっている。このまとまりを新しい変数として見ると、積分の形を単純にできる。
置換積分とは、複雑な式を別の変数で表し直し、積分しやすい形へ変える考え方である。
ただし、置換は単なる文字の入れ替えではない。新しい変数の変化が元の変数の変化とどのようにつながるかを同時に考える必要がある。

合成関数の微分を逆向きに見る

置換積分の理由は、合成関数の微分公式を逆向きに利用することで理解できる。
開区間 I 上で微分可能な関数 g と、$g(I)$ を含む開区間 J 上で微分可能な関数 F を考える。さらに、J 上で $F'(t) = f(t)$ を満たすとする。
このとき、合成関数の微分公式より、次のように計算できる。

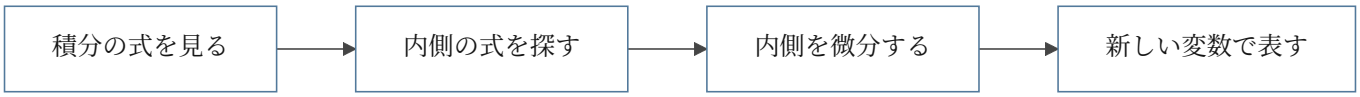
$$\begin{aligned}(F(g(x)))' &= F'(g(x))g'(x)\\ &= f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

ここで、$F'(g(x))$ は外側の関数の微分、$g'(x)$ は内側の関数の微分を表している。
したがって、$f(g(x))$ と $g'(x)$ が積の形で現れる積分では、被積分関数の原始関数を得られる。
置換積分は、この合成関数の微分を逆向きに利用し、内側の関数を新しい変数として扱う考え方である。

内側の微分が必要になる理由

例えば、$t = g(x)$ と置くと、変数の変化を対応させるために $g(x)$ の微分が関係する。
微分記号を用いると、$dt = g'(x)dx$ と表すことがある。ただし、これは有限の変化量を表す普通の等式として扱うものではなく、微分公式による変数変換を簡潔に表した記法である。
内側の式だけを置き換えても、変化の大きさが一致しなければ正しい積分にはならない。そのため、内側の微分にあたる因子を確認する必要がある。

置換の流れを確認する

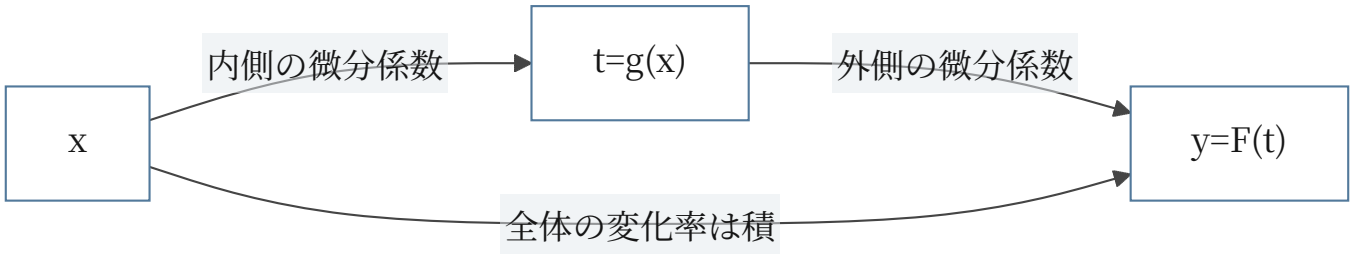


変化率の対応を見る

置換積分では、変数を変えるだけではなく、それぞれの変化率の対応を考える必要がある。

©ミライコーチング

x から $t=g(x)$ へ変化し、さらに $y=F(t)$ へ進む流れでは、全体の変化率は内側の微分係数と外側の微分係数の積として表される。



内側の微分係数 $g'(x)$ と外側の微分係数 $F'(g(x))$ が組み合わさることで、合成関数の微分が作られる。この関係を逆向きに見ることが置換積分の考え方につながる。

置換積分で注意する点

置換積分では、次の点に注意する。

- x と t を混ぜたまま計算しない。
- 内側の微分による係数を忘れない。
- 不定積分では最後に元の変数へ戻す。
- 不定積分の答えには積分定数 C を付ける。

置換積分の基本

式の中にまとまり $g(x)$ があり、その微分 $g'(x)$ も含まれる場合、$g(x)$ を新しい変数として扱うことで積分を簡単な形へ変える考え方を置換積分という。

例題 1：基本的な置換の考え方

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx$$

例題 1 の解答・解説

内側の式 x^2+1 に注目する。ここで $t=x^2+1$ と置く。
微分すると、$dt=2xdx$ である。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2+1)^3dx &= \int t^3dt \\ &= \frac{t^4}{4}+C \\ &= \frac{(x^2+1)^4}{4}+C\end{aligned}$$

微分検算の結果を確認すると、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)^4}{4}\right)=2x(x^2+1)^3$$

計算結果は上の式であり、微分検算でも一致する。

例題 2：係数を確認する置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 6x(x^2+3)^2dx$$

例題 2 の解答・解説

内側の式 x^2+3 に注目する。ここで $t=x^2+3$ と置く。
微分すると、$dt=2xdx$ である。
もとの式には $6xdx$ があるため、$6xdx=3dt$ と調整する。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 6x(x^2+3)^2dx &= 3\int t^2dt \\ &= t^3+C \\ &= (x^2+3)^3+C\end{aligned}$$

微分検算の結果を確認すると、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}(x^2+3)^3=6x(x^2+3)^2$$

計算結果は上の式であり、微分検算でも一致する。

©ミライコーチング

例題 3：内側の式を見る置換

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 3x^2(x^3+1)^2\,dx$$

例題 3 の解答・解説

内側の式 x^3+1 に注目する。ここで $t=x^3+1$ と置く。
x^3+1 は二乗されている式であり、その微分 $3x^2$ が前にあることが判断のポイントである。
微分すると、$dt=3x^2dx$ である。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 3x^2(x^3+1)^2\,dx &= \int t^2\,dt \\ &= \frac{t^3}{3}+C \\ &= \frac{(x^3+1)^3}{3}+C\end{aligned}$$

微分検算の結果を確認すると、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^3+1)^3}{3}\right)=3x^2(x^3+1)^2$$

計算結果は上の式であり、微分検算でも一致する。

演習問題

演習問題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 4x(x^2+2)^3\,dx$$

演習問題 2

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 8x(x^2-1)^2\,dx$$

演習問題 3

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 15x^2(x^3+4)^2\,dx$$

演習問題 4

次の不定積分を求めなさい。

$$\int 5(5x+1)^4\,dx$$

演習問題 5：置換できる形か判断する

次の不定積分について、$t=x^2+1$ と置いたとき、そのまま $\int t^3\,dt$ としてよいか答えなさい。理由を微分の関係から説明しなさい。

$$\int (x^2+1)^3\,dx$$

演習問題 6

次の不定積分について、誤っている計算を指摘し、正しい答えを求めなさい。

$$\int 6x(x^2+3)^2\,dx = \frac{(x^2+3)^3}{3}+C$$

演習問題 7

次の不定積分を求めなさい。途中で新しい変数を導入し、最後に x の式へ戻しなさい。

$$\int 12x(x^2-2)^3\,dx$$

演習問題 8

次の不定積分を求めなさい。x と新しい変数を混在させずに計算しなさい。

$$\int 9x^2(x^3-1)^4\,dx$$

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

内側の式 x^2+2 に注目する。ここで $t=x^2+2$ と置く。
微分すると、$dt=2xdx$ である。
したがって、$4xdx=2dt$ と調整できる。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 4x(x^2+2)^3dx &= 2\int t^3dt \\ &= 2\cdot\frac{t^4}{4}+C \\ &= \frac{t^4}{2}+C \\ &= \frac{(x^2+2)^4}{2}+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+2)^4}{2}\right)=4x(x^2+2)^3$$

演習問題 2 の解答・解説

内側の式 x^2-1 に注目する。ここで $t=x^2-1$ と置く。
微分すると、$dt=2xdx$ である。
したがって、$8xdx=4dt$ と調整する。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 8x(x^2-1)^2dx &= 4\int t^2dt \\ &= 4\cdot\frac{t^3}{3}+C \\ &= \frac{4}{3}t^3+C \\ &= \frac{4}{3}(x^2-1)^3+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}(x^2-1)^3\right)=8x(x^2-1)^2$$

演習問題 3 の解答・解説

内側の式 x^3+4 に注目する。ここで $t=x^3+4$ と置く。
微分すると、$dt=3x^2dx$ である。
したがって、$15x^2dx=5dt$ と調整できる。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 15x^2(x^3+4)^2dx &= 5\int t^2dt\\ &= 5\cdot\frac{t^3}{3}+C\\ &= \frac{5}{3}t^3+C\\ &= \frac{5}{3}(x^3+4)^3+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}(x^3+4)^3\right)=15x^2(x^3+4)^2$$

演習問題 4 の解答・解説

内側の式 $5x+1$ に注目する。ここで $t=5x+1$ と置く。
微分すると、$dt=5dx$ である。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 5(5x+1)^4dx &= \int t^4dt\\ &= \frac{t^5}{5}+C\\ &= \frac{(5x+1)^5}{5}+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(5x+1)^5}{5}\right)=5(5x+1)^4$$

演習問題 5 の解答・解説

$t = x^2 + 1$ と置くと、$dt = 2xdx$ である。
しかし、元の積分には $2xdx$ に対応する因子がなく、dx だけが残っている。
そのため、次のような変形をして $\int t^3 dt$ とすることはできない。

$$\int (x^2+1)^3 dx = \int t^3 dt$$

この変形では、$dt = 2xdx$ に対応する変化率の因子を取り入れていないため、置換積分の条件を満たしていない。
もし誤って $\frac{t^4}{4} + C$ と計算した場合、元へ戻すと $\frac{(x^2+1)^4}{4} + C$ になる。
これを微分すると次の式が得られ、元の被積分関数とは異なる。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+1)^4}{4}\right) = (x^2+1)^3 \cdot 2x$$

不足している $2x$ が現れるため、この式は元の積分の原始関数ではない。

演習問題 6 の解答・解説

与えられた式では、内側の式 $x^2 + 3$ の微分による係数調整が不足している。
$t = x^2 + 3$ と置くと、$dt = 2xdx$ である。もとの式には $6xdx$ があるため、$6xdx = 3dt$ と対応させる。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 6x(x^2+3)^2 dx &= 3\int t^2 dt \\ &= t^3 + C \\ &= (x^2+3)^3 + C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}(x^2+3)^3 = 6x(x^2+3)^2$$

誤りは、内側の微分による係数調整をせず、$\frac{(x^2+3)^3}{3} + C$ とした点である。

演習問題 7 の解答・解説

内側の式 x^2-2 に注目する。ここで $t=x^2-2$ と置く。
微分すると、$dt=2xdx$ である。
したがって、$12xdx=6dt$ と調整する。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 12x(x^2-2)^3dx &= 6\int t^3dt \\ &= 6\cdot\frac{t^4}{4}+C \\ &= \frac{3}{2}t^4+C \\ &= \frac{3}{2}(x^2-2)^4+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}(x^2-2)^4\right)=12x(x^2-2)^3$$

演習問題 8 の解答・解説

内側の式 x^3-1 に注目する。ここで $t=x^3-1$ と置く。
微分すると、$dt=3x^2dx$ である。
したがって、$9x^2dx=3dt$ と調整する。
次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\int 9x^2(x^3-1)^4dx &= 3\int t^4dt \\ &= 3\cdot\frac{t^5}{5}+C \\ &= \frac{3}{5}t^5+C \\ &= \frac{3}{5}(x^3-1)^5+C\end{aligned}$$

微分すると次の式が得られ、元の被積分関数と一致する。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}(x^3-1)^5\right)=9x^2(x^3-1)^4$$