

第 78 講 三次式の因数分解

学習目標

- ・ 三次式の展開公式を逆向きに見て、三次式を因数分解できる。
- ・ 和の立方・差の立方と、三乗の形を見分けて適切な公式を選べる。
- ・ 共通因数がある式では、先に共通因数をくくってから三次式の公式を使える。
- ・ 因数分解した式を展開し、元の式に戻るかを確かめられる。

展開を逆向きに見る

因数分解は、展開と逆向きの操作である。前講で扱った三次式の展開を右から左へ読めば、そのまま因数分解の公式になる。

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

したがって、 $a^3 + b^3$ や $a^3 - b^3$ の形を見つけたときは、三乗されている 2 つの部分それぞれ a 、 b と見ればよい。

符号には注意が必要である。 $a^3 + b^3$ では最初の因数が $a + b$ となり、二次式の中央は $-ab$ となる。

一方、 $a^3 - b^3$ では最初の因数が $a - b$ となり、二次式の中央は $+ab$ となる。

また、次の式も展開公式を逆向きに読んだものである。

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

4 項ある式では、両端が三乗になっているだけでなく、中央の 2 項が $3a^2b$ 、 $3ab^2$ に対応しているかまで確認することが必要である。

共通因数を先に探す

三次式の公式が見えにくいときは、式全体に共通する因数がないかを最初に確認する。

例えば $2x^4 - 16x$ は、そのままでは三次式の公式の形に見えない。しかし、共通因数 $2x$ をくくると

$$2x^4 - 16x = 2x(x^3 - 8)$$

となる。括弧の中は $x^3 - 2^3$ であり、差の立方の公式を使える形である。

因数分解では、「公式を探す前に共通因数を探す」という順序が有効である。共通因数を残したまま公式を探すと、使える形を見落としやすい。

三次式を因数分解する手順

1. 式全体に共通因数があるかを確認する。
2. 共通因数があれば先にくくろ。
3. 残った式が $a^3 + b^3$ 、 $a^3 - b^3$ 、 $(a + b)^3$ 、 $(a - b)^3$ に対応する形かを調べる。
4. 対応する公式を逆向きを使う。
5. 因数分解した式を展開し、元の式に戻ることを確認する。

例題

例題 1

$x^3 + 27$ を因数分解せよ。

例題 1 の解答・解説

$27 = 3^3$ であるから、与えられた式は $x^3 + 3^3$ であり、和の立方の公式を使える。

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

符号を確認すると、最初の因数は $x + 3$ であり、二次式の中央は $-3x$ である。
検算として展開すると、

$$\begin{aligned}(x + 3)(x^2 - 3x + 9) &= x^3 - 3x^2 + 9x + 3x^2 - 9x + 27 \\ &= x^3 + 27\end{aligned}$$

となり、元の式に戻る。したがって、因数分解は $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ である。

例題 2

$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$ を因数分解せよ。

例題 2 の解答・解説

両端を見ると、 $8a^3 = (2a)^3$ 、 $27b^3 = (3b)^3$ である。

公式の文字 a に $2a$ 、 b に $3b$ を対応させると、

$$3(2a)^2(3b) = 36a^2b$$

$$3(2a)(3b)^2 = 54ab^2$$

であり、中央の 2 項も $(2a - 3b)^3$ の展開に一致する。

したがって、

$$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$$

である。

検算として $(2a - 3b)^3$ を展開すると、 $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$ に戻る。両端だけで判断せず、中央の係数まで確認することが重要である。

例題 3

$2x^4 - 16x$ を因数分解せよ。

例題 3 の解答・解説

すべての項に共通する因数 $2x$ があるため、先にくくる。

$$2x^4 - 16x = 2x(x^3 - 8)$$

ここで、 $8 = 2^3$ であるから、括弧の中は $x^3 - 2^3$ である。差の立方の公式を使うと、

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

となる。

したがって、

$$2x^4 - 16x = 2x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

である。

検算では、先に $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$ と戻し、さらに $2x$ を掛けると $2x^4 - 16x$ となる。共通因数も含めて元の式に戻ることを確認する必要がある。

演習問題

演習問題 1

$y^3 + 64$ を因数分解せよ。

演習問題 2

$27a^3 - b^3$ を因数分解せよ。

演習問題 3

$x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ を因数分解せよ。

演習問題 4

$8p^3 + 36p^2q + 54pq^2 + 27q^3$ を因数分解せよ。

演習問題 5

$5x^4 + 40x$ を因数分解せよ。

演習問題 6

$6a^4b - 48ab^4$ を因数分解せよ。

演習問題 7

$12m^3n^2 + 36m^2n^3 + 36mn^4 + 12n^5$ を因数分解せよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

$64 = 4^3$ であるから、

$$y^3 + 64 = y^3 + 4^3$$

である。和の立方の公式を使うと、

$$y^3 + 64 = (y + 4)(y^2 - 4y + 16)$$

となる。

展開すると $y^3 + 64$ に戻るため、因数分解は $(y + 4)(y^2 - 4y + 16)$ である。

演習問題 2 の解答・解説

$27a^3 = (3a)^3$ であるから、

$$27a^3 - b^3 = (3a)^3 - b^3$$

である。差の立方の公式を使うと、

$$27a^3 - b^3 = (3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$$

となる。

差の立方では、最初の因数が $3a - b$ である一方、二次式の中央は $+3ab$ となる点に注意が必要である。展開すると元の式に戻る。

演習問題 3 の解答・解説

両端は x^3 と 4^3 である。 $(x - 4)^3$ の形を考えると、

$$3x^2 \cdot 4 = 12x^2$$

$$3x \cdot 4^2 = 48x$$

となり、中央の 2 項の係数と符号も一致する。

したがって、

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x - 4)^3$$

である。

$(x - 4)^3$ を展開すると元の 4 項に戻るため、確認できる。

演習問題 4 の解答・解説

両端は $(2p)^3$ と $(3q)^3$ である。中央の項を確認すると、

$$3(2p)^2(3q) = 36p^2q$$

$$3(2p)(3q)^2 = 54pq^2$$

となる。

したがって、

$$8p^3 + 36p^2q + 54pq^2 + 27q^3 = (2p + 3q)^3$$

である。

展開すると元の式に戻る。4 項の式では、両端だけでなく中央の 2 項まで対応を確認することが必要である。

演習問題 5 の解答・解説

すべての項に共通する因数 $5x$ を先にくくる。

$$5x^4 + 40x = 5x(x^3 + 8)$$

$8 = 2^3$ であるから、括弧の中に和の立方の公式を使う。

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

したがって、

$$5x^4 + 40x = 5x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

である。

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$ と展開して戻し、さらに $5x$ を掛ければ元の式になる。

演習問題 6 の解答・解説

2 項に共通する因数は $6ab$ である。先にくくると、

$$6a^4b - 48ab^4 = 6ab(a^3 - 8b^3)$$

となる。 $8b^3 = (2b)^3$ であるから、

$$a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3$$

である。差の立方の公式を使うと、

$$a^3 - 8b^3 = (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

となる。

したがって、

$$6a^4b - 48ab^4 = 6ab(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

である。

展開して $6ab(a^3 - 8b^3)$ に戻し、さらに分配すれば元の式と一致する。

演習問題 7 の解答・解説

すべての項に共通する因数 $12n^2$ を先にくくる。

$$12m^3n^2 + 36m^2n^3 + 36mn^4 + 12n^5 = 12n^2(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)$$

括弧の中は $(m + n)^3$ の展開と一致するため、

$$m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = (m + n)^3$$

である。

したがって、

$$12m^3n^2 + 36m^2n^3 + 36mn^4 + 12n^5 = 12n^2(m + n)^3$$

である。

$(m + n)^3$ を展開し、最後に $12n^2$ を掛ければ元の式に戻る。共通因数を先に取り出すことで、三乗の形が見えやすくなる例である。