第 102 講 一般角

学習目標

- 正のx軸を始線とする角の標準位置を説明できる。
- 反時計回りを正、時計回りを負として、正角・負角を読み分けられる。
- 0°から360°の外にある角も、回転量を表す一般角として扱える。
- 2 つの角の終辺が同じかを、360°の整数倍の差で判定できる。
- 1 つの終辺を表す角を、$\theta = \alpha + 360^\circ \times k$（$k$は整数）と表せる。

1. 角を「開き」ではなく「回転」として見る

角は、始線から終辺までの回転である

これまでの角では、三角形の内角のように、角の大きさを主に0°から180°の範囲で考えることが多かった。しかし三角関数では、角を**半直線の回転**として考える。
回転を始める半直線を**始線**、回転したあとの半直線を**終辺**という。頂点を原点Oに置き、始線を正のx軸に重ねた位置を、角の**標準位置**という。
標準位置では、始線はいつも正のx軸で固定される。角を見分けるときは、「どこから回り始めたか」「どちら向きに回ったか」「最後にどの方向へ着いたか」を分けて考えることが大切である。

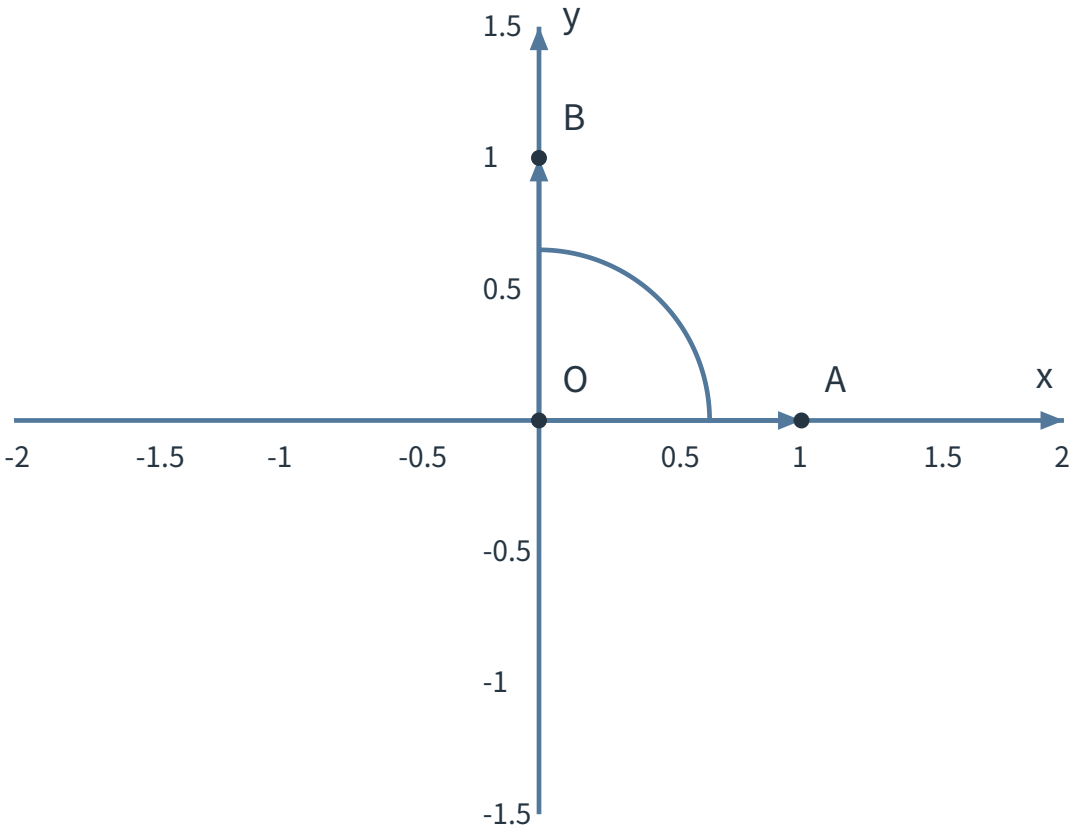

図 1　正の x 軸を始線とし、反時計回りに 90°回転した角

正角と負角

正のx軸を始線として、**反時計回り**に回転する角を正の角、**時計回り**に回転する角を負の角という。
したがって、上の図は90°である。一方、同じ始線から時計回りに90°回転すれば、角は−90°である。

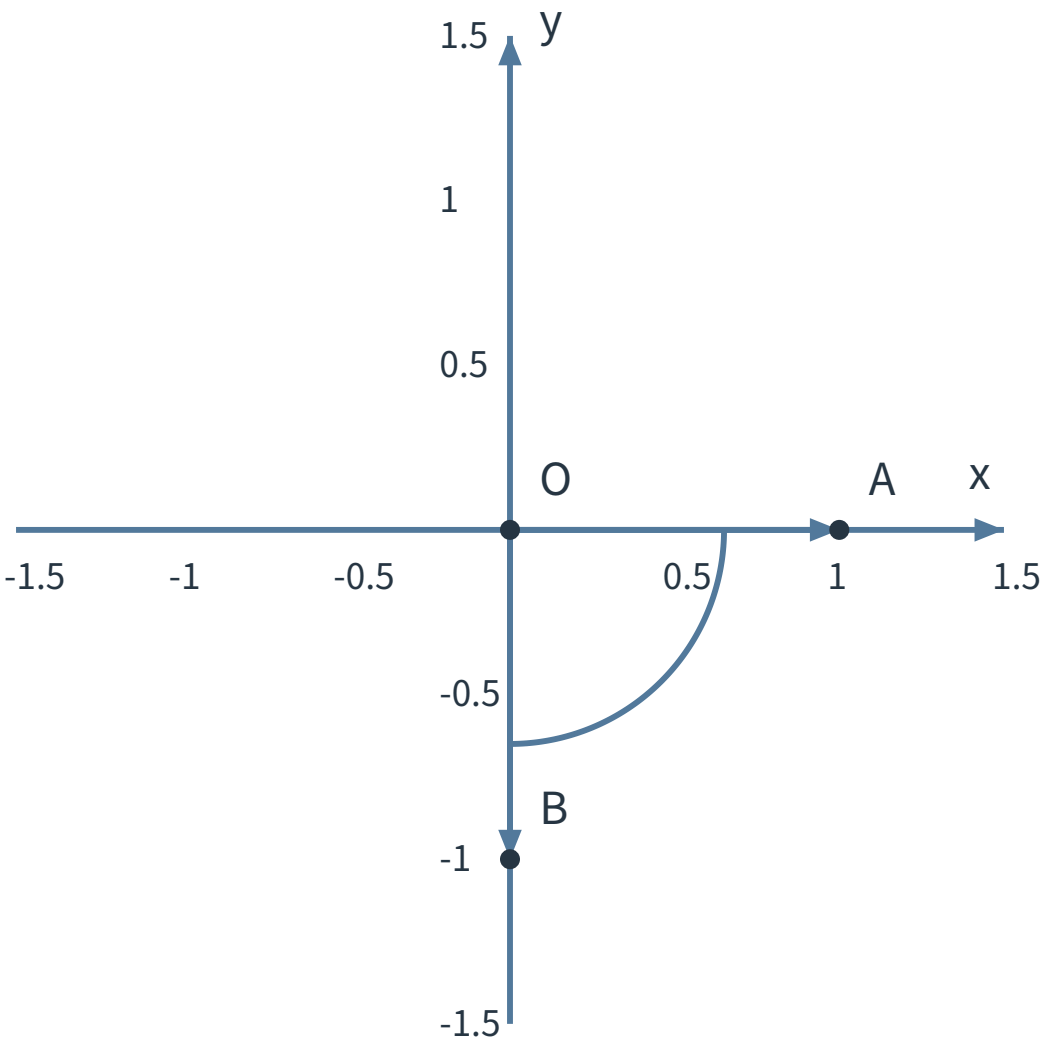

図 2　正の x 軸を始線とし、時計回りに 90°回転した角 -90°

符号は回転方向を表す

90°と−90°は、絶対値が同じでも別の角である。90°は反時計回り、−90°は時計回りであり、回転方向が異なるからである。
角の符号を消して絶対値だけを見ると、終辺の位置まで取り違えることがある。一般角では、符号を回転方向の情報として残して考える必要がある。

2. 360°をこえる角も、負の角も扱う

1 回転しても回転は続けられる

360°回転すると、終辺はいったん始線と同じ正のx軸へ戻る。しかし、そこで回転を止める必要はない。さらに回せば、450°や720°のような角も考えられる。
同様に、時計回りの回転も$-90°$、$-450°$のように何回でも続けられる。このように、正負や回転数に制限を設けずに表した角を**一般角**という。
一般角では、「終辺がどこにあるか」と「そこへ何度回転して到達したか」は別の情報である。

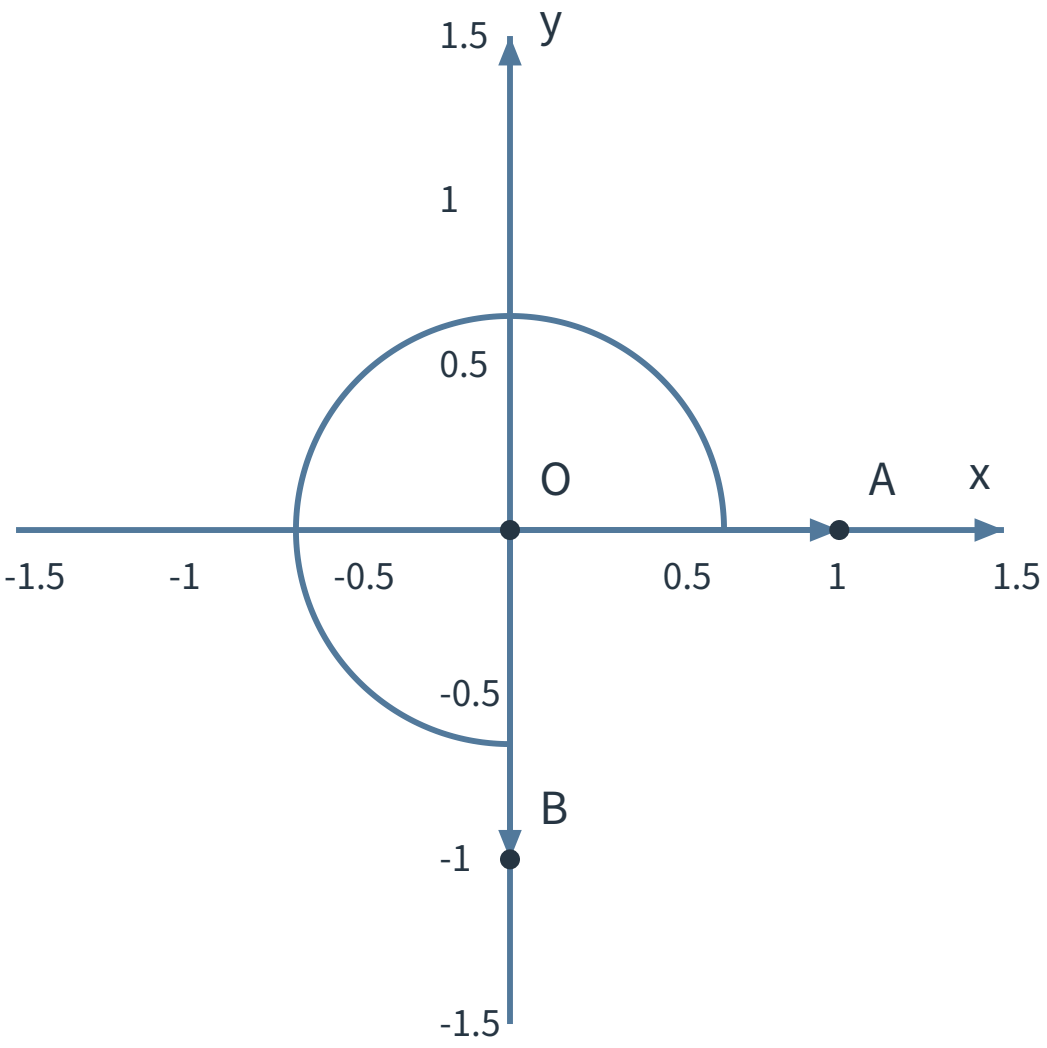

図 3　正の x 軸から反時計回りに 270°回転した終辺

270°と$-90°$を比べる

270°は反時計回りに270°回転する角であり、終辺は負のy軸の向きになる。一方、$-90°$は時計回りに90°回転する角であり、やはり終辺は負のy軸の向きになる。
したがって、270°と$-90°$は**回転量は異なるが、終辺は同じ**である。

回転量と終辺を分けて考える

90°と450°は、どちらも終辺が正のy軸の向きになる。しかし、450°は90°よりちょうど360°多く回転している。
角を0°から360°の範囲だけに制限すると、この「1 回転多い」「1 回転少ない」という情報を表せない。一般角は、終辺の位置だけでなく回転量そのものを扱うために必要である。

3. 終辺が同じ角の表し方

同じ終辺へ戻るのは、ちょうど 1 回転ずつずらしたときである

ある角αから360°を 1 回分だけ加えても、終辺は同じ位置へ戻る。360°を 2 回分加えても同じであり、逆に360°を 1 回分、2 回分と引いても同じ終辺になる。
したがって、角αと終辺が同じ角θは、次の形で表せる。

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times k$$

ここで、kは整数である。

なぜkは整数なのか

同じ終辺へ戻るには、360°という**1 回転を整数回**だけ加えるか引く必要があるからである。
例えば、$k = 1$なら360°を 1 回分加え、$k = -1$なら360°を 1 回分引く。もし$k = \frac{1}{2}$とすると180°だけずれるので、終辺は反対向きになり、同じ終辺にはならない。

30°と同じ終辺をもつ角

$\alpha = 30^\circ$とすると、同じ終辺をもつ角は$\theta = 30^\circ + 360^\circ \times k$（$k$は整数）で表される。
例えば、$k = 0, 1, -1$を代入すると、それぞれ30°、390°、−330°となる。これらは回転量こそ異なるが、終辺はすべて同じである。

余りだけで判断しない

終辺だけを調べるとき、360°ごとに整理する考え方は有効である。しかし一般角では、もとの角が正か負か、何回転した角かという回転量も大切な情報である。
したがって、最初から角を0°以上360°未満へ押し込めるのではなく、まず回転方向と回転量を読み、そのうえで「2 つの角の差が360°の整数倍か」を確認するのが安全である。

4. 例題

例題 1：図から角を読む

次の図は、正のx軸を始線として反時計回りに回転した角を表している。終辺と円弧から、表される角を答えよ。

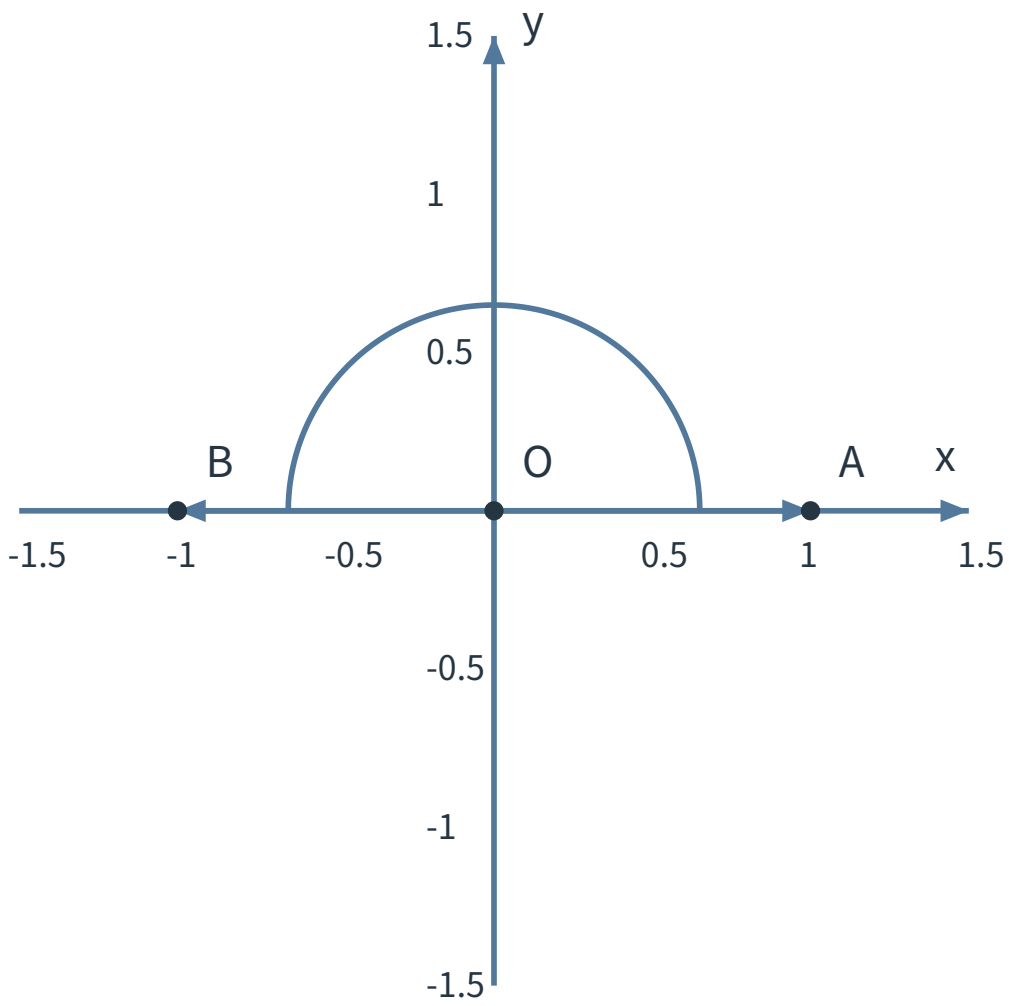

図 4　正の x 軸から反時計回りに回転した角

例題 1 の解答・解説

図では、正のx軸から反時計回りに半回転している。反時計回りなので正の角であり、半回転は180°である。
したがって、表される角は180°である。

例題 2：角から終辺を選ぶ

次の図の 4 本の半直線を、OA、OB、OC、ODとする。正のx軸を始線として270°回転したとき、終辺となる半直線を 1 つ選べ。

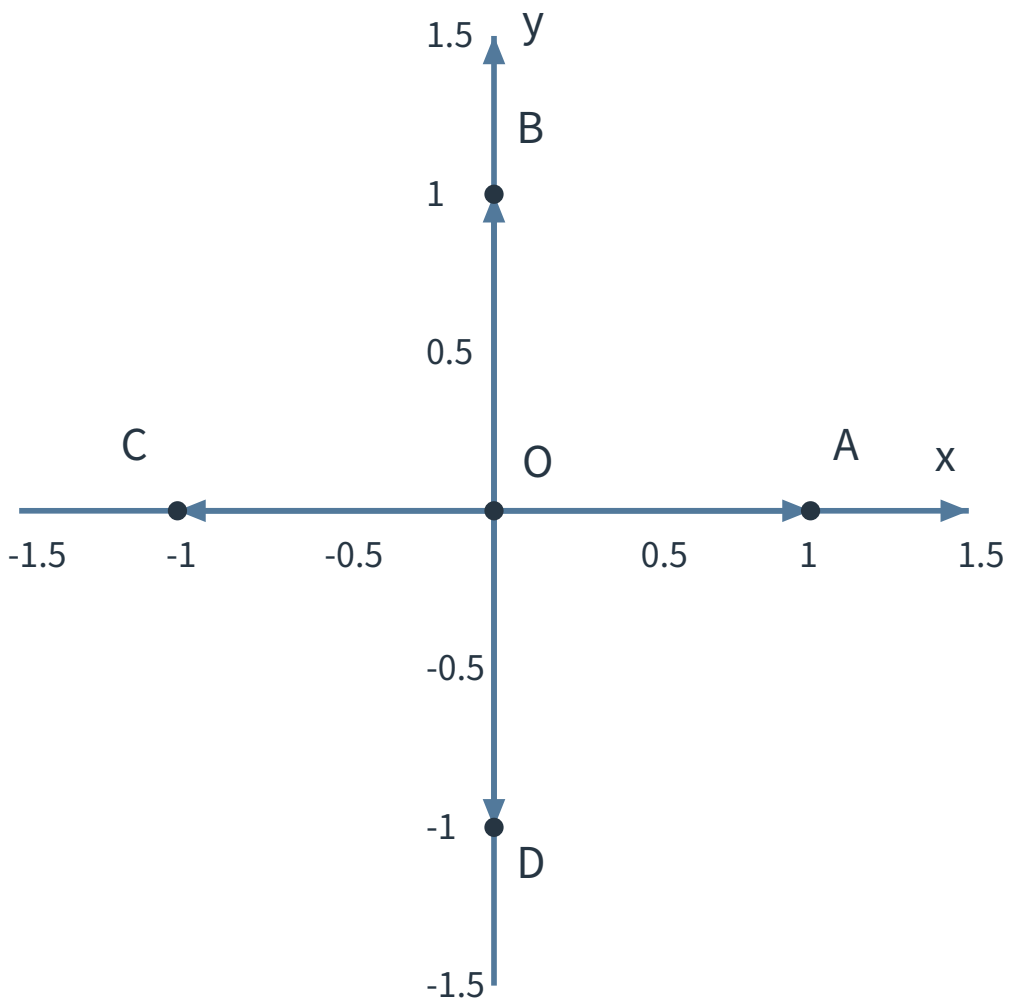

図 5　終辺の候補となる 4 本の半直線

例題 2 の解答・解説

270°は反時計回りに270°回転する角である。終辺は負のy軸の向きになるので、該当するのは半直線ODである。

例題 3：同じ終辺をもつ角

60°と終辺が同じ角を、すべて表せ。

例題 3 の解答・解説

終辺が同じ角どうしは、360°の整数倍だけ異なる。
したがって、求める角は$\theta = 60^\circ + 360^\circ \times k$（$k$は整数）である。
例えば420°は$60^\circ + 360^\circ$、-300°は$60^\circ - 360^\circ$なので、どちらも60°と同じ終辺をもつ。

©ミライコーチング

5. 演習問題

演習 1：正角と負角

次の角について、回転方向を「反時計回り」または「時計回り」で答えよ。
(1) 135°
(2) -40°
(3) -450°

演習 2：図から角を読む

次の図は、正のx軸を始線として時計回りに回転した角を表している。終辺と円弧から角を答えよ。

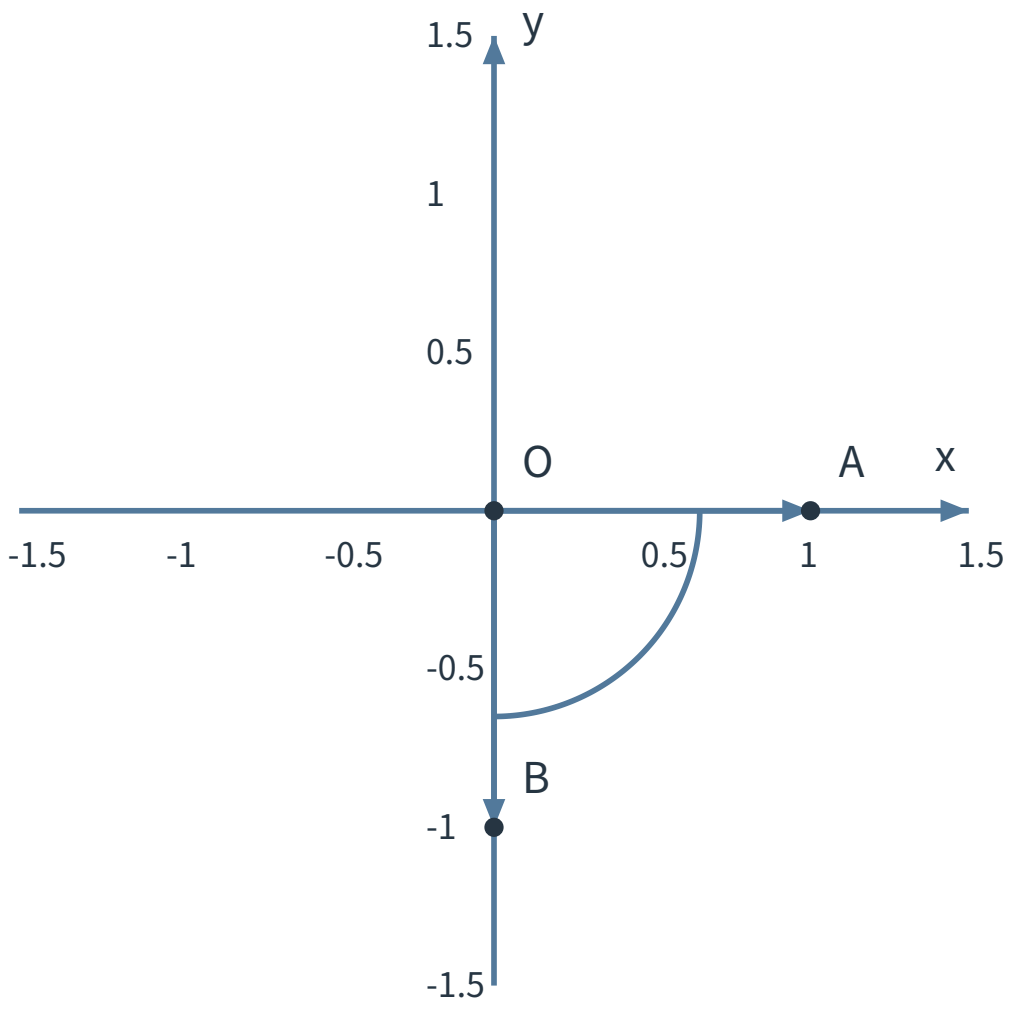

図 6　正の x 軸から時計回りに回転した角

演習 3：角から終辺を判断する

正のx軸を始線とする。次の角の終辺が、正のx軸・正のy軸・負のx軸・負のy軸のどれと重なるか答えよ。
(1) 90°
(2) -90°
(3) 450°
(4) -180°

演習 4：終辺が同じかを判定する

次の 2 つの角は終辺が同じか。差が360°の整数倍であるかを使って判定せよ。
(1) 120°と480°
(2) 70°と-290°
(3) 45°と225°

演習 5：一般角で表す

-45°と終辺が同じ角を、kを整数としてすべて表せ。

演習 6：範囲内の角を列挙する

30°と終辺が同じ角のうち、-720°以上720°以下のものをすべて求めよ。

演習 7：回転量と終辺を区別する

270°と-90°について、次の問いに答えよ。
(1) 2 つの角の回転方向はそれぞれどちら向きか。
(2) 2 つの角の終辺は同じか。
(3) 2 つの角そのものは同じといえるか。理由も答えよ。

6. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) 135°は正の角なので、反時計回りである。
(2) -40°は負の角なので、時計回りである。
(3) -450°は負の角なので、時計回りである。360°をこえる大きさでも、負号があるので回転方向は時計回りである。

演習 2 の解答・解説

図では正のx軸から時計回りに90°回転している。時計回りは負の角なので、表される角は-90°である。

演習 3 の解答・解説

(1) 90°は反時計回りに 4 分の 1 回転するので、終辺は正のy軸と重なる。
(2) -90°は時計回りに 4 分の 1 回転するので、終辺は負のy軸と重なる。
(3) $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$である。1 回転したあとさらに$90^\circ$回転するので、終辺は正の$y$軸と重なる。
(4) -180°は時計回りに半回転するので、終辺は負のx軸と重なる。

演習 4 の解答・解説

(1) 差は$480^\circ - 120^\circ = 360^\circ$であり、$360^\circ$の整数倍である。したがって、終辺は同じである。
(2) 差は$70^\circ - (-290^\circ) = 360^\circ$であり、$360^\circ$の整数倍である。したがって、終辺は同じである。
(3) 差は$225^\circ - 45^\circ = 180^\circ$であり、$360^\circ$の整数倍ではない。したがって、終辺は同じではない。

演習 5 の解答・解説

終辺が同じ角は、もとの角に360°の整数倍を加えた形で表せる。
したがって、$\theta = -45^\circ + 360^\circ \times k$（$k$は整数）である。

演習 6 の解答・解説

30°と終辺が同じ角は、$\theta = 30^\circ + 360^\circ \times k$（$k$は整数）である。
範囲に入るように整数kを選ぶと、$k = -2, -1, 0, 1$である。それぞれを代入すると、-690°、-330°、30°、390°を得る。
したがって、求める角は-690°、-330°、30°、390°である。

演習 7 の解答・解説

(1) 270°は正の角なので反時計回り、-90°は負の角なので時計回りである。
(2) $270^\circ - (-90^\circ) = 360^\circ$であり、差が$360^\circ$の整数倍なので、終辺は同じである。
(3) 2 つの角そのものは同じではない。270°は反時計回りに270°回転した角、-90°は時計回りに90°回転した角であり、回転量と回転方向が異なるからである。終辺が同じであることと、角そのものが同じであることは区別する必要がある。

©ミライコーチング