第 249 講 複素数の絶対値と共役複素数

学習目標

- 複素数の絶対値を、原点から点までの長さとして説明し、計算できる。
- 共役複素数を、実軸に関する対称移動として説明し、求められる。
- $z\overline{z} = |\,z\,|^2$ など、絶対値と共役複素数の基本性質を使える。
- 共役を用いて、実軸上・虚軸上にあるための条件を判断できる。

1. 絶対値は原点からの長さである

実数の絶対値を平面へ広げる

実数 x の絶対値 $|\,x\,|$ は、数直線上で原点から x までの距離である。複素数平面でも同じ考えを用い、複素数 z に対応する点と原点との距離を z の絶対値という。

$z = a + bi$ に対応する点を $P(a, b)$ とする。直角三角形 OAP に三平方の定理を用いると、

$$OP^2 = a^2 + b^2$$

である。長さは負でないので、

$$|\,z\,| = OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

となる。平方根は非負の値を表す。

複素数の絶対値

$z = a + bi$ の絶対値を

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と定める。常に $|\,z\,| \geq 0$ であり、$|\,z\,| = 0$ であることと $z = 0$ であることは同値である。

例題 1：絶対値を求める

$z = 3 + 4i$ の絶対値を求め、図の直角三角形との関係を説明せよ。

例題 1 の解答・解説

$z = 3 + 4i$ に対応する点は $P(3, 4)$ である。したがって、

$$|\,z\,| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

である。図では、横の長さが 3、縦の長さが 4 の直角三角形の斜辺 OP が $|\,z\,|$ を表す。

©ミライコーチング

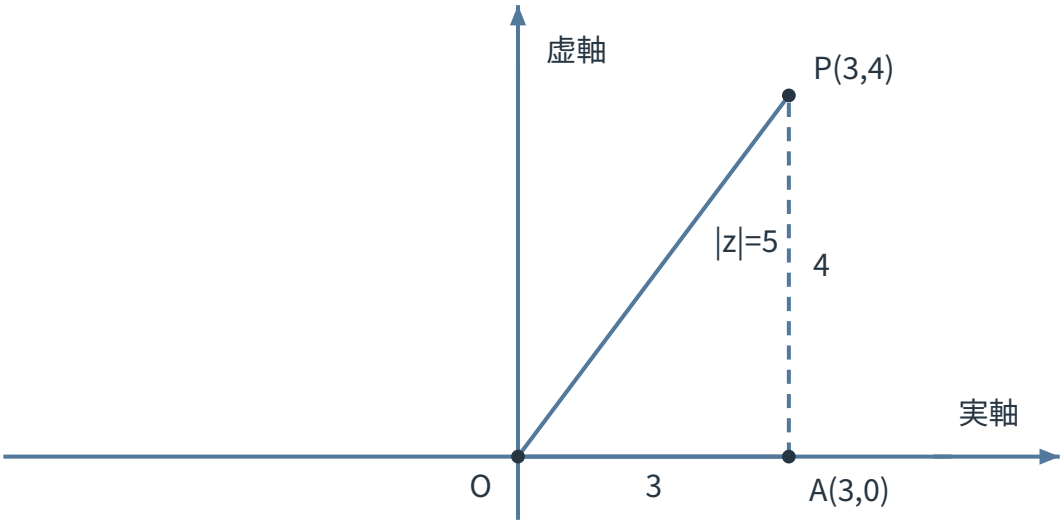

図 1　$|\,3+4i\,|$ は原点から点 $P(3,4)$ までの長さである

絶対値は実部だけの絶対値ではない

$|\,a+bi\,|$ は一般に $|\,a\,|$ でも $|\,b\,|$ でもない。実部と虚部を二辺とする直角三角形の斜辺の長さなので、$\sqrt{a^2+b^2}$ である。

2. 共役複素数は実軸に関する鏡映である

虚部の符号だけを反対にする

$z=a+bi$ に対応する点は (a,b) である。この点を実軸に関して対称移動すると $(a,-b)$ になる。対応する複素数は $a-bi$ である。

共役複素数

$z=a+bi$ に対して、

$$\overline{z}=a-bi$$

を z の共役複素数という。実部は変わらず、虚部の符号だけが反対になる。

例題 2：共役複素数を図で捉える

$z=-2+3i$ の共役複素数を求め、対応する二つの点の位置関係を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

虚部の符号を反対にするので、

$$\overline{z}=-2-3i$$

である。z と $\overline{z}$ に対応する点はそれぞれ $(-2,3)$、$(-2,-3)$ であり、実軸に関して対称である。二点を結ぶ線分は実軸に垂直で、その中点 $(-2,0)$ は実軸上にある。

©ミライコーチング

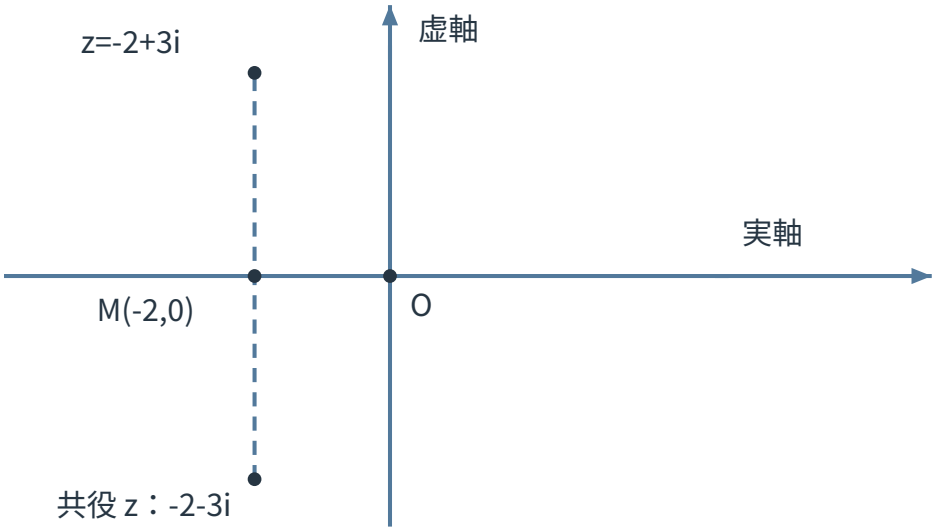

図 2　z と $\overline{z}$ は実軸に関して対称である

3. 絶対値と共役を結ぶ性質

積を計算すると長さの平方になる

$z = a + bi$ とすると、

$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

である。一方、$|\,z\,|^2 = a^2 + b^2$ なので、

$$z\overline{z} = |\,z\,|^2$$

を得る。左辺は複素数の積であるが、結果は非負の実数である。この等式は、絶対値と共役複素数を結ぶ基本公式である。

共役と絶対値の基本性質

任意の複素数 z について、

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad |\,\overline{z}\,| = |\,z\,|, \qquad z\overline{z} = |\,z\,|^2$$

が成り立つ。共役を 2 回取ると元に戻る。また、実軸について反転しても原点からの距離は変わらない。

例題 3：性質を確かめる

$z = 1 - 2i$ とする。$\overline{z}$、$|\,z\,|$、$z\overline{z}$ を求め、$z\overline{z} = |\,z\,|^2$ を確かめよ。

例題 3 の解答・解説

$\overline{z} = 1 + 2i$ であり、

$$| z | = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

である。また、

$$z\overline{z} = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$$

となる。$| z |^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ なので、確かに $z\overline{z} = | z |^2$ である。

4. 共役で軸上の点を判定する

変わらない点と符号が反転する点

$z = a + bi$ とする。$z = \overline{z}$ ならば $a + bi = a - bi$ なので $b = 0$ である。したがって、

$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ は実数}$$

である。図では、実軸に関して反転しても動かない点を表す。
また、$z = -\overline{z}$ ならば $a + bi = -a + bi$ なので $a = 0$ である。したがって、

$$z = -\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ は虚軸上の点に対応する}$$

である。後者には $z = 0$ も含まれる。$z \neq 0$ を加えれば純虚数である。

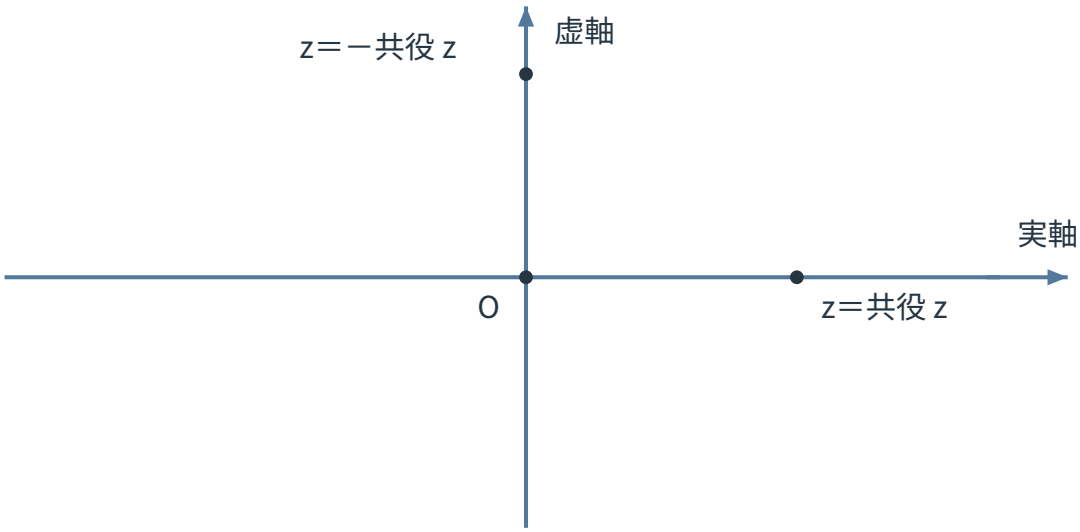

図 3　共役による実軸上・虚軸上の判定

共役の横線と絶対値の縦線を区別する

$\overline{z}$ は実軸に関して反転した複素数であり、$| z |$ は原点からの長さを表す非負の実数である。たとえば $z = 3 + 4i$ のとき、$\overline{z} = 3 - 4i$ であるが、$| z | = 5$ である。

演習

演習 1：絶対値と共役

次の複素数について、絶対値と共役複素数を求めよ。
(1) $3-4i$　(2) $-5+12i$　(3) $-6i$　(4) 7

演習 2：図形的意味

$z=-4-3i$ に対応する点を P とする。$|z|$ と $\overline{z}$ を求め、$\overline{z}$ に対応する点 Q と P の位置関係を説明せよ。

演習 3：基本性質

$z=2+5i$ とする。次の値を求めよ。
(1) $\overline{\overline{z}}$　(2) $|\overline{z}|$　(3) $z\overline{z}$

演習 4：未知の成分を求める

$z=a+bi$ とし、a,b は実数とする。$\overline{z}=3+4i$ かつ $|z|=5$ であるとき、a,b を求めよ。

演習 5：共役による判定

$z=a+bi$ とする。次の条件から、対応する点がどの軸上にあるか答え、a,b の条件を示せ。
(1) $z=\overline{z}$　(2) $z=-\overline{z}$

演習 6：誤りを直す

次の説明の誤りを直せ。
(1) $|-3+4i|=-5$ である。
(2) $z=2-3i$ の共役複素数は $-2+3i$ である。
(3) $z\overline{z}=|z|$ はすべての複素数で成り立つ。

演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) $|3-4i|=5$、$\overline{3-4i}=3+4i$ である。
(2) $|-5+12i|=13$、$\overline{-5+12i}=-5-12i$ である。
(3) $|-6i|=6$、$\overline{-6i}=6i$ である。
(4) $|7|=7$、$\overline{7}=7$ である。

演習 2 の解答・解説

$P=(-4,-3)$ なので、

$$|\,z\,|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$$

であり、$\overline{z}=-4+3i$ である。$Q=(-4,3)$ だから、P と Q は実軸に関して対称である。

演習 3 の解答・解説

$\overline{z}=2-5i$ より、
(1) $\overline{\overline{z}}=2+5i$ である。
(2) $|\,\overline{z}\,|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ である。
(3) $z\overline{z}=2^2+5^2=29$ である。

演習 4 の解答・解説

$\overline{z}=a-bi=3+4i$ である。実部と虚部を比べると、$a=3$、$-b=4$ なので、

$$a=3,\qquad b=-4$$

である。このとき $|\,z\,|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ となり、絶対値の条件にも合う。

演習 5 の解答・解説

(1) $a+bi=a-bi$ より $b=0$ である。対応する点は実軸上にある。
(2) $a+bi=-a+bi$ より $a=0$ である。対応する点は虚軸上にある。原点も含まれる。

演習 6 の解答・解説

(1) 絶対値は非負である。$|-3+4i\,|=\sqrt{9+16}=5$ である。
(2) 共役複素数は実部を変えず、虚部の符号を反対にするので、$\overline{z}=2+3i$ である。
(3) すべての複素数で成り立つのは $z\overline{z}=|\,z\,|^2$ である。

©ミライコーチング