第 034 講 合体と分裂の運動

この講でできるようになること

- 合体や分裂の前後で、同じ物体系の全運動量を比較できる。
- 合体後の共通速度を、質量と符号付き速度から求められる。
- 静止中・運動中の物体が分裂する場合に、運動量保存と追加条件から分裂後の速度を判断できる。
- 運動量保存と運動エネルギー保存を区別し、計算結果の物理的な意味を説明できる。

1. 合体や分裂でも運動量は保存するのか

滑らかな床を動く 2 台の台車が衝突し、そのままくっついて進む場合を考える。衝突前には 2 台が別々の速度で動いていても、衝突後には一体となって同じ速度で進む。

反対に、1 つにまとまっていた物体が内部のばねなどの働きで 2 つに分かれ、それぞれ異なる速度で動き始める場合もある。

このように物体の運動が大きく変化するとき、何が変わり、何が変わらないのだろうか。

重要なのは、個々の物体の運動ではなく、**同じ物体系に含まれる物体すべての運動量の和**に注目することである。

全体を 1 つの系として扱う

質量が m_A、m_B の物体 A、B を考える。両物体の質量は一定とし、運動は水平方向の一直線上に限る。

右向きを正、左向きを負に定める。A、B の速度をそれぞれ v_A、v_B とすると、各物体の運動量は $p_A = m_A v_A$、$p_B = m_B v_B$ である。

A と B をまとめた系の全運動量 P は、

$$P = m_A v_A + m_B v_B$$

となる。

運動量は向きを持つ量であるため、左向きの速度には負号を付ける。質量だけを足したり、速度の大きさだけを足したりして全運動量を求めてはならない。

系の運動量と保存条件

A と B を同じ系とし、作用の直前から直後までの短い時間区間を考える。

この区間に系が外部から受ける水平方向の合力の力積を J_{ext} とすると、

$$P_{\text{後}} - P_{\text{前}} = J_{\text{ext}}$$

である。

外力の力積が 0 の場合には、

$$P_{\text{前}} = P_{\text{後}}$$

となる。これが系全体の運動量保存である。外力の力積が厳密には 0 でなくても、要求される精度の範囲で無視できる場合には、全運動量が近似的に保存すると扱える。

本講で主に扱うのは、物体が滑らかな水平床の上を動く理想化した場面である。重力と床からの垂直抗力は鉛直方向につり合い、水平外力が働かないとする。

この条件では、衝突や分裂の直前から直後までの短い区間について、系全体が受ける水平外力の力積は 0 となる。したがって全運動量を保存量として扱える。

一方、A が B を押す力や B が A を押す力は、A と B を合わせた系の内部で働く力である。作用と反作用による力積は全体系で足すと打ち消し合う。

ただし、**系全体の運動量が保存しても、A と B それぞれの運動量が保存するとは限らない**。物体間で運動量が受け渡されるからである。

運動量保存を使う前の判断

- **系**：合体や分裂の前後で、同じ物質全体を追跡しているか。
- **区間**：作用の直前と直後を比較しているか。
- **方向**：共通の正方向を固定し、速度に符号を付けたか。
- **保存条件**：系が受ける外力の力積を無視できるか。

この 4 点を固定してから、前後の全運動量を式にする。

2. 2 つの物体が合体するとき

合体後は共通の速度になる

質量 m_A の物体 A が速度 u_A、質量 m_B の物体 B が速度 u_B で動いているとする。

2 つの物体が衝突して**一体となって進むことが問題の条件として与えられた場合**、衝突後には A も B も共通の速度 V になる。

衝突前後で系を A+B に固定し、衝突中の外力の力積を無視できるならば、

$$m_A u_A + m_B u_B = (m_A + m_B)V$$

が成り立つ。

したがって、

$$V = \frac{m_A u_A + m_B u_B}{m_A + m_B}$$

である。

分子は合体前の全運動量、分母は合体後の全質量を表す。衝突前の速度が異なっていても、合体後には同じ速度 V を持つという条件が加わるため、未知数を 1 つにできる。

この式だけから 2 物体が必ず合体すると判断できるわけではない。合体は、問題で与えられる衝突後の状態に関する条件である。

1

滑らかな水平床の上で、質量 2 kg の物体 A が右向きに 3 m/s で進んでいる。前方には質量 1 kg の静止した物体 B がある。

A は B に衝突して一体となり、そのまま進んだ。系は衝突前後とも A+B であり、右向きを正とする。衝突の直前から直後までの水平外力の力積は 0 とする。

(1) 合体直後の共通速度 V を求めよ。

(2) 衝突直前と直後の系全体の運動量をそれぞれ求め、比較せよ。

解答・解説

(1) A の初速度は $+3\,\mathrm{m/s}$、B の初速度は $0\,\mathrm{m/s}$ である。

まず、衝突直前の全運動量を求める。

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (2\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

衝突中の水平外力の力積は 0 である。合体後の質量は 3 kg で、A と B は同じ速度 V で動くため、

$$(3\,\mathrm{kg})V = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

これを解くと、

$$V = \frac{+6\,\mathrm{kg\,m/s}}{3\,\mathrm{kg}} = +2\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、合体直後は**右向きに** 2 m/s で進む。

(2) 衝突直前の全運動量は、

$$P_{\text{前}} = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

衝突直後は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (3\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s}) \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、衝突前後で系全体の運動量は等しい。

衝突によって個々の速度は変化するが、系全体の運動量は保存されている。

©ミライコーチング

衝突直前と直後を別々の模式図で表す。どちらの図でも系は A+B、右向きが正であり、速度矢印は 1 m/s を 30 px で表す共通尺度で描いている。

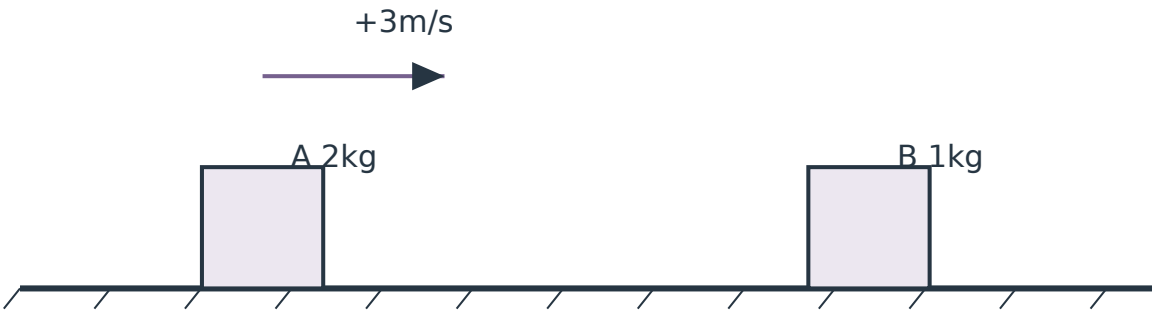

図 1　合体前：A 2kg は+3m/s、B 1kg は 0m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。

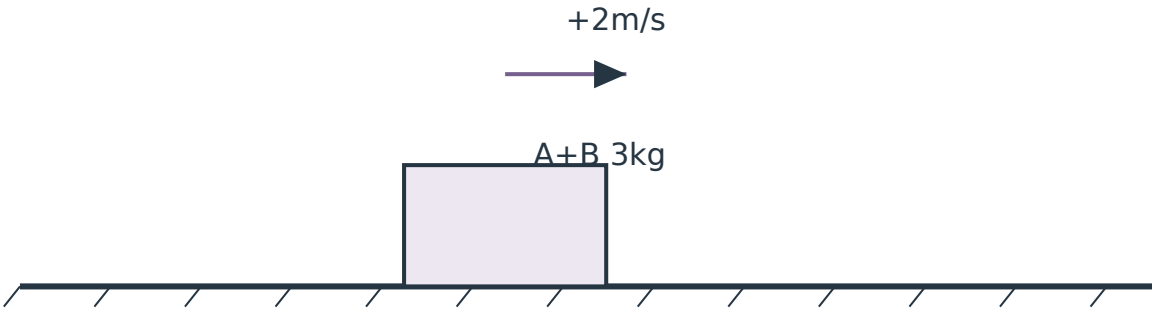

図 2　合体後：同じ系 A+B 3kg は+2m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。

合体前の A の速度矢印は右向きに 90 px、合体後の共通速度の矢印は右向きに 60 px である。静止している B には速度矢印を描いていない。

合体後の大きなブロックは、A と B を合わせた同じ系全体を表している。新たな第三の物体が加わったという意味ではない。

各図の物体の位置や幅は模式的であり、質量・移動距離・物体間の実際の距離を比例表現したものではない。前後の図はそれぞれ異なる瞬間の状態を示している。

速度の単純平均とは限らない

合体後の速度は、2 つの初速度の単純な平均になるとは限らない。

質量が異なれば、同じ速度でも運動量への寄与が異なる。したがって、**速度の平均ではなく、質量を掛けた運動量の和**を先に求める必要がある。

なお、2 物体の質量が等しい場合には、運動量保存式から、

$$V = \frac{u_A + u_B}{2}$$

となる。ただし、この場合も両方の速度を符号付きで扱う。

2

滑らかな水平床の上で、質量 2 kg の物体 A が右向きに 4 m/s、質量 1 kg の物体 B が左向きに 2 m/s で向かい合って進んでいる。

A は B の左側から、B は A の右側から接近し、衝突後に一体となった。系を A+B、右向きを正とし、衝突直前から直後までの水平外力の力積は 0 とする。

(1) 衝突直前の全運動量を求めよ。

(2) 合体直後の共通速度を求めよ。

(3) 初速度の単純平均を使ってはならない理由を説明せよ。

解答・解説

(1) A の初速度は $+4\,\mathrm{m/s}$、B の初速度は $-2\,\mathrm{m/s}$ である。

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &= +8\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad -2\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

したがって、全運動量は $+6\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

B は左向きに動いているため、その運動量を負として加えることが重要である。

(2) 合体後の質量は 3 kg であり、共通速度を V とすると、

$$(3\,\mathrm{kg})V = +6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$V = +2\,\mathrm{m/s}$$

となる。

よって、合体直後は**右向きに** 2 m/s である。

(3) A と B の質量が異なり、それぞれの運動量への寄与が異なるためである。

この場合、符号付き初速度だけの単純平均は、

$$\frac{+4\,\mathrm{m/s} + (-2\,\mathrm{m/s})}{2} = +1\,\mathrm{m/s}$$

となり、運動量保存から求めた共通速度とは一致しない。

合体後の共通速度を求めるには、質量を考慮した全運動量を使う必要がある。

3. 静止していた物体が分裂するとき

分裂前後も同じ系を追跡する

内部に縮めたばねを持つ物体が、ばねの働きで 2 つの部分に分かれる場合を考える。

分裂前には 1 つにまとまっていても、分裂後には 2 つの物体が別々の速度で動く。

ここでも、分裂の前後で同じ物質全体を系とする。分裂後の物体を A、B と呼び、それぞれの質量を m_A、m_B とすると、分裂前の全質量は、

$$M = m_A + m_B$$

である。

分裂前の速度を U、分裂直後の A、B の速度を v_A、v_B とする。右向きを正とし、分裂中に系が受ける水平外力の力積が 0 ならば、

$$MU = m_A v_A + m_B v_B$$

となる。

分裂で生じる内部の力は個々の物体の速度を変えるが、系全体の運動量の和は変えない。

最初に静止していた場合

分裂前の物体が静止していた場合、$U = 0$ である。

したがって、

$$m_A v_A + m_B v_B = 0$$

より、

$$m_A v_A = -m_B v_B$$

となる。

これは、分裂直後の A と B の運動量が大きさの等しい逆向きの値になることを意味する。

分裂後に両方が動いているなら、A が左へ進むと B は右へ進み、A が右へ進むと B は左へ進む。

また、運動量の大きさが等しいため、**質量の小さい物体ほど速さが大きくなる**。

3

滑らかな水平床の上で、質量 3 kg の物体が静止している。

物体の内部に蓄えられたエネルギーの働きによって、質量 1 kg の A と質量 2 kg の B に分裂した。

分裂直後、A は左向きに 4 m/s で動いた。系は分裂前後とも A+B であり、右向きを正とする。分裂の直前から直後までに系が受ける水平外力の力積は 0 とする。

(1) 分裂直後の B の速度を求めよ。

(2) 分裂前後の系全体の運動量をそれぞれ求め、比較せよ。

解答・解説

(1) 分裂前の物体は静止しているため、全運動量は $0\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

A の分裂直後の速度は $-4\,\mathrm{m/s}$ である。

B の分裂直後の速度を v_B とすると、運動量保存より、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg})(-4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})v_B \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(2\,\mathrm{kg})v_B = +4\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$v_B = +2\,\mathrm{m/s}$$

である。

よって、B は**右向きに** $2\,\mathrm{m/s}$ で進む。

(2) 分裂前は、

$$P_{\text{前}} = (3\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

分裂直後は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (1\,\mathrm{kg})(-4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s}) \\ &= -4\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +4\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

分裂前後で全運動量はともに 0 であり、保存されている。

A と B の速度は異なるが、それぞれの運動量が打ち消し合っている。

分裂の前後を別々の図で表す。系はどちらも A+B であり、右向きを正とする。速度矢印の共通尺度は 1 m/s を 30 px で表すものとする。

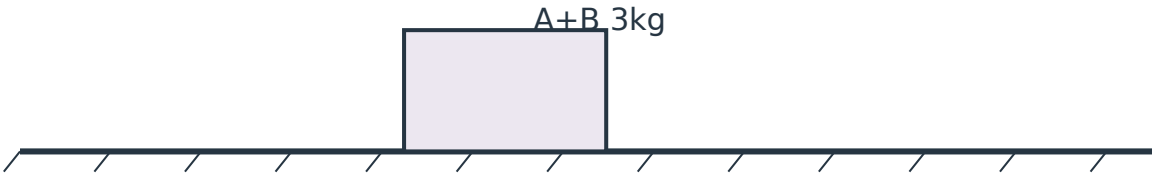

図 3　分裂前：同じ系 A+B 3kg は静止。右正、速度 0 なので矢印なし。

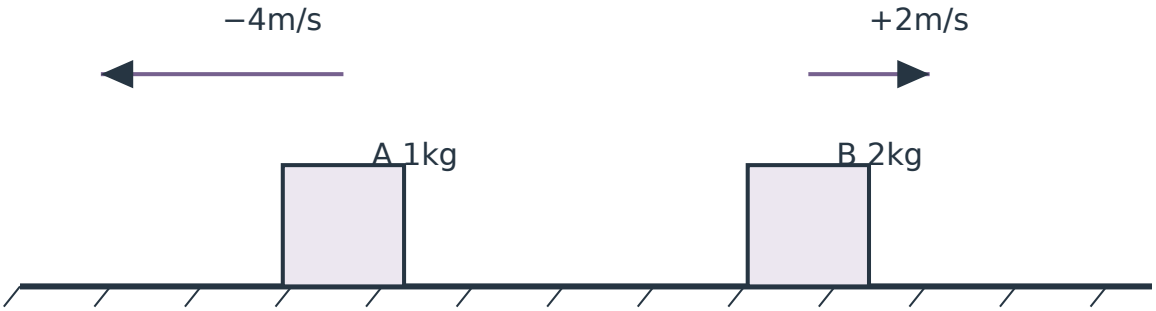

図 4　分裂後：A 1kg は−4m/s、B 2kg は+2m/s。右正、矢印は 1m/s を 30px で表す。

分裂前は静止しているため、速度矢印がない。分裂後の A の矢印は左向きに 120 px、B の矢印は右向きに 60 px である。

A の速さは B の 2 倍だが、質量は B の半分である。そのため、両者の運動量の大きさは等しくなる。

図の各ブロックの位置や幅は模式的であり、質量・移動距離・分裂後の実際の間隔を比例表現していない。分裂前の単一ブロックも分裂後の 2 物体と同じ系全体を表している。

静止からの分裂で使える関係

分裂前の全運動量が 0 で、分裂直後の 2 物体がともに動いている場合、

$$m_A v_A = -m_B v_B$$

である。

速さをそれぞれ s_A、s_B とすると、

$$m_A s_A = m_B s_B$$

より、

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

となる。

ここでは速度の向きを表す符号と、非負の速さを区別している。

4. 動いていた物体が分裂するとき

分裂前の運動量が 0 でない場合

分裂前の物体がすでに動いている場合も、考え方は同じである。

質量 M の物体が速度 U で動いており、A と B に分裂するならば、水平外力の力積を無視できる条件で、

$$MU = m_A v_A + m_B v_B$$

が成り立つ。

ただし、分裂前の全運動量は一般に 0 ではない。したがって、分裂後の A と B が必ず逆方向へ進むとは限らない。

分裂前に右向きの運動量を持っていれば、分裂後に両方が右向きに進みながら、その運動量の和が分裂前と等しくなることもある。

4

滑らかな水平床の上を、質量 3 kg の物体が右向きに 2 m/s で進んでいる。

この物体が内部のエネルギーによって質量 1 kg の A と質量 2 kg の B に分裂した。

分裂直後、A の速度は左向きに 2 m/s であった。系は分裂前後とも A+B、右向きを正とする。分裂の直前から直後までの水平外力の力積は 0 とする。

(1) 分裂前の全運動量を求めよ。

(2) 分裂直後の B の速度を求めよ。

(3) 求めた速度を使い、分裂直後の全運動量が分裂前と等しいことを確かめよ。

解答・解説

(1) 分裂前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (3\,\text{kg})(+2\,\text{m/s}) \\ &= +6\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

である。

(2) 分裂直後の A の速度は $-2\,\mathrm{m/s}$ である。

B の速度を v_B とすると、

$$+6\,\mathrm{kg\,m/s} = (1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) + (2\,\mathrm{kg})v_B$$

となる。

よって、

$$(2\,\mathrm{kg})v_B = +8\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$v_B = +4\,\mathrm{m/s}$$

である。

したがって、B は**右向きに** $4\,\mathrm{m/s}$ で進む。

(3) 分裂直後の全運動量を計算すると、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &= -2\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +8\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

分裂前後の全運動量は等しい。

この場合、A と B は逆方向へ進んでいるが、それぞれの運動量の大きさは等しくない。最初から系全体が右向きの運動量を持っていたためである。

運動量保存だけでは決まらないこと

分裂後の速度 v_A と v_B がどちらも未知の場合、運動量保存から得られる式は、

$$MU = m_A v_A + m_B v_B$$

の 1 本である。

この式だけでは、一般に 2 つの未知速度をそれぞれ 1 つの値に決めることはできない。

一方の速度、分裂後の速度間の関係など、独立した追加条件が必要になる。

たとえば、静止していた物体が 2 つに分裂する場合、運動量保存から速さの比は求められる。しかし、分裂によってどれだけの運動エネルギーが与えられたかなどが分からなければ、速さの絶対値までは求められない。

運動量が保存することと、すべての速度が一意に決まることは別である。

5. 運動量と運動エネルギーは同じように保存するのか

運動量が保存しても運動エネルギーが変わる

物体の運動エネルギー K は、質量を m、速さを s とすると、

$$K = \frac{1}{2}ms^2$$

である。

速度 v は正負の符号を持つが、その 2 乗は負にならない。そのため、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

として計算してもよい。

運動エネルギーは、左向きの物体でも右向きの物体でも 0 以上である。運動量と違い、左右の向きによって運動エネルギーが打ち消し合うことはない。

合体では運動エネルギーが減少する

例題 1 の合体を考える。A と B の合計質量は 3 kg であり、合体後の共通速度は +2 m/s であった。

合体前の運動エネルギーの和は、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(3\,\text{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(0\,\text{m/s})^2 \\ &= 9\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

合体後は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(2\,\text{m/s})^2 \\ &= 6\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、運動エネルギーは、

$$9\,\text{J} - 6\,\text{J} = 3\,\text{J}$$

だけ減少した。

運動量は +6 kg m/s のまま保存していたが、運動エネルギーの和は保存していない。

この減少分は、衝突による物体の変形、熱、音などに関わるエネルギーへ移る。エネルギーそのものが消滅したわけではない。

©ミライコーチング

例題 2 についても確かめる。合体前は、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(-2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 16\,\mathrm{J} + 2\,\mathrm{J} \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

合体後の共通速度は $+2\,\mathrm{m/s}$ なので、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(3\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

運動エネルギーの減少量は、

$$18\,\mathrm{J} - 6\,\mathrm{J} = 12\,\mathrm{J}$$

である。

衝突後の運動量を求めるときに、運動エネルギーも同時に保存すると仮定してはならない。

分裂では運動エネルギーが増加することもある

例題 3 では、分裂前の物体は静止していたため、

$$K_{\text{前}} = 0\,\mathrm{J}$$

である。

分裂後の A と B の運動エネルギーの和は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(-4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(+2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 8\,\mathrm{J} + 4\,\mathrm{J} \\ &= 12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

全運動量は分裂前後とも $0\,\mathrm{kg\,m/s}$ であるが、運動エネルギーの和は $12\,\mathrm{J}$ 増加している。

この運動エネルギーは、分裂前の物体の内部に蓄えられていたエネルギーから供給されたものである。何もないところからエネルギーが生じたわけではない。

例題 4 でも、分裂前の運動エネルギーは、

$$K_{\text{前}} = \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(2\,\text{m/s})^2$$
$$= 6\,\text{J}$$

であるのに対し、分裂後は、

$$K_{\text{後}} = \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(-2\,\text{m/s})^2$$
$$+\frac{1}{2}(2\,\text{kg})(+4\,\text{m/s})^2$$
$$= 2\,\text{J} + 16\,\text{J}$$
$$= 18\,\text{J}$$

となる。

この場合、運動エネルギーの和は、

$$18\,\text{J} - 6\,\text{J} = 12\,\text{J}$$

増加している。

運動量保存とエネルギー保存の区別

- 運動量は向きのある量であり、右向きと左向きの値が打ち消し合う。
- 運動エネルギーは 0 以上の量であり、左右の向きで打ち消し合わない。
- 系への外力の力積を無視できれば、全運動量は保存する。
- その条件だけでは、運動エネルギーの和が保存するとはいえない。

合体では運動エネルギーの一部が変形や熱などに移り、分裂では内部に蓄えられたエネルギーが運動エネルギーに移ることがある。

6. 外力の力積がある場合

ここまで扱った合体や分裂では、作用中に系全体が受ける水平外力の力積を 0 としていた。

しかし、外部からの力積が無視できない場合には、全運動量をそのまま保存すると考えてはならない。

系を同じ物質全体に固定すると、

$$P_{\text{後}} - P_{\text{前}} = J_{\text{ext}}$$

である。

したがって、

$$P_{\text{後}} = P_{\text{前}} + J_{\text{ext}}$$

として計算する。

外力の力積は正にも負にもなる。右向きを正とすると、左向きの外力の力積は負であり、系全体の運動量を負の方向に変化させる。

衝突や分裂が起きたという事実だけで、運動量保存の成立を判断してはならない。判断の基準は、**比較する区間に系全体が受けた外力の力積**である。

演習問題

以下では、特に断りがなければ物体は滑らかな水平床の上を動き、質量は一定、運動は水平方向の一次元に限る。各問題で右向きを正とし、比較する区間は合体または分裂の直前から直後までとする。

また、演習 4 を除き、系全体が受ける水平外力の力積は 0 とする。

1

質量 1 kg の物体 A が右向きに 3 m/s、質量 3 kg の物体 B が左向きに 1 m/s で向かい合って進んでいる。

2 物体は衝突して一体となった。系は衝突前後とも A+B、右向きを正とする。衝突中の水平外力の力積は 0 である。

(1) 衝突直前の全運動量を求めよ。

(2) 合体直後の共通速度を求め、物体の状態を説明せよ。

(3) 合体前後の運動エネルギーの和をそれぞれ求め、その変化量と変化の意味を説明せよ。

(4) 「衝突前の全運動量が 0 なら、衝突前の運動エネルギーの和も 0 である」という主張が正しいか答え、理由を説明せよ。

2

滑らかな水平床の上を、質量 3 kg の物体が右向きに 2 m/s で進んでいる。

この物体が、内部に蓄えられたエネルギーの働きで質量 1 kg の A と質量 2 kg の B に分裂した。

分裂直後、A は右向きに 4 m/s で進んだ。系は分裂前後とも A+B、右向きを正とする。分裂の直前から直後までの水平外力の力積は 0 である。

(1) 分裂前の全運動量を求めよ。

(2) 分裂直後の B の速度を求めよ。

(3) A と B の分裂直後の進行方向について、運動量保存と矛盾しない理由を説明せよ。

(4) 分裂前後の運動エネルギーの和をそれぞれ求め、増減とその理由を説明せよ。

©ミライコーチング

3

質量 4 kg の物体が滑らかな水平床の上で静止している。

この物体が内部のエネルギーの働きで、質量 1 kg の A と質量 3 kg の B に分裂した。分裂直後には A も B も動いている。

系は分裂前後とも A+B、右向きを正とする。分裂の直前から直後までの水平外力の力積は 0 である。

(1) 分裂前の全運動量を求めよ。

(2) 分裂直後の A と B の進行方向には、どのような関係があるか説明せよ。

(3) 分裂直後の A と B の速さの比 $s_A : s_B$ を求めよ。

(4) (1)〜(3)の条件だけで、A と B の速さをそれぞれ具体的な数値に決められるか答えよ。また、その理由と、数値を決めるために必要な追加条件の例を説明せよ。

4

質量 1 kg の物体 A が滑らかな水平床の上を右向きに 4 m/s で進み、静止している質量 1 kg の物体 B に衝突した。

衝突後、A と B は一体となって進んだ。

系を A+B、右向きを正とする。衝突直前から直後までに、系全体は外部から水平方向に $-1\,\mathrm{N\,s}$ の力積を受けたものとする。

(1) 衝突直前の全運動量を求めよ。

(2) 衝突直後の全運動量を求めよ。

(3) 合体直後の共通速度を求めよ。

(4) 水平外力の力積を無視して単純に運動量保存式を用いると、共通速度はいくらになるか。また、その計算が本問では誤りとなる理由を説明せよ。

©ミライコーチング

5

次の各主張について、正しいか誤っているかを判断し、その理由を説明せよ。

どの主張についても、物体 A と B の質量は一定であり、一次元運動を考える。また、右向きを正とする。

(1)「合体直前から直後までに A+B 全体系が受ける水平外力の力積が 0 なら、A と B それぞれの運動量も衝突前後で保存する。」

(2)「質量の異なる 2 物体が合体するとき、合体後の共通速度は、常に 2 物体の初速度の単純平均で求められる。」

(3)「静止していた物体が 2 つに分裂し、両方が動き始めた場合、分裂中の水平外力の力積が 0 なら、分裂直後の 2 物体の運動量は等しい大きさで反対向きとなる。」

(4)「系全体の運動量が保存するならば、系全体の運動エネルギーの和も必ず保存する。」

(5)「運動中の物体が分裂した場合、分裂後の 2 物体は必ず反対向きに進む。」

(6)「合体するという条件が与えられていなくても、全運動量が保存すると分かれば、衝突後の 2 物体が共通速度で進むと決めてよい。」

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 衝突直前の全運動量

系を A+B、右向きを正とする。A の速度は $+3\,\mathrm{m/s}$、B の速度は $-1\,\mathrm{m/s}$ である。

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (1\,\mathrm{kg})(+3\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(3\,\mathrm{kg})(-1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +3\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad -3\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

答えは $0\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

2 物体は逆向きに運動しており、運動量が打ち消し合っている。

(2) 合体直後の共通速度

衝突直前から直後までの水平外力の力積は 0 である。合体後の共通速度を V とすると、

$$(4\,\mathrm{kg})V = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$V = 0\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、**合体直後は静止する**。

この結論は、A と B の初速度の大きさが同じだからではない。質量と符号付き速度の積で求めた全運動量が 0 だからである。

(3) 運動エネルギーの変化

合体前の運動エネルギーの和は、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(3\,\text{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(-1\,\text{m/s})^2 \\ &= 4.5\,\text{J} + 1.5\,\text{J} \\ &= 6\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

合体後は静止するため、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(4\,\text{kg})(0\,\text{m/s})^2 \\ &= 0\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

変化量は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} - K_{\text{前}} &= 0\,\text{J} - 6\,\text{J} \\ &= -6\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、**運動エネルギーの和は 6 J 減少した**。

この減少分は、衝突に伴う変形や熱などに関わるエネルギーへ移る。全エネルギーが消えたわけではない。

(4) 主張の正誤

誤りである。

運動量は符号付きで加えるため、右向きと左向きの運動量が打ち消し合うことがある。

一方、運動エネルギーは速度の 2 乗に比例し、進行方向によって負にならない。

本問でも、衝突前の全運動量は 0 kg m/s であるが、運動エネルギーの和は 6 J である。

したがって、全運動量が 0 であることから運動エネルギーの和も 0 であるとはいえない。

2

(1) 分裂前の全運動量

系は分裂前後とも A+B であり、右向きを正とする。

分裂前の全質量は 3 kg、速度は +2 m/s である。

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (3\,\text{kg})(+2\,\text{m/s}) \\ &= +6\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

したがって、答えは +6 kg m/s である。

(2) B の分裂直後の速度

分裂の直前から直後までの水平外力の力積は 0 なので、全運動量が保存する。

A の分裂直後の速度は $+4\,\mathrm{m/s}$ である。B の速度を v_B とすると、

$$\begin{aligned} +6\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})v_B \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$(2\,\mathrm{kg})v_B = +2\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$v_B = +1\,\mathrm{m/s}$$

である。

答えは **右向きに** $1\,\mathrm{m/s}$ である。

(3) 分裂直後の進行方向

A の速度は $+4\,\mathrm{m/s}$、B の速度は $+1\,\mathrm{m/s}$ であるため、**両方とも右向き**に進む。

このときの全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= (1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(2\,\mathrm{kg})(+1\,\mathrm{m/s}) \\ &= +4\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +2\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= +6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

分裂前の全運動量も $+6\,\mathrm{kg\,m/s}$ であるため、運動量保存に矛盾しない。

分裂前から右向きの運動量を持っていたため、分裂後に両方が右向きに進むことが可能なのである。

(4) 運動エネルギーの変化

分裂前の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\text{前}} &= \frac{1}{2}(3\,\text{kg})(2\,\text{m/s})^2 \\ &= 6\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

分裂後の運動エネルギーの和は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} &= \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(4\,\text{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(1\,\text{m/s})^2 \\ &= 8\,\text{J} + 1\,\text{J} \\ &= 9\,\text{J} \end{aligned}$$

である。

変化量は、

$$\begin{aligned} K_{\text{後}} - K_{\text{前}} &= 9\,\text{J} - 6\,\text{J} \\ &= +3\,\text{J} \end{aligned}$$

となる。

したがって、**運動エネルギーの和は 3 J 増加した**。

これは、分裂前の物体内部に蓄えられていたエネルギーの一部が、分裂後の運動エネルギーに移ったことによる。

全運動量が保存していても、運動エネルギーの和が増加する場合はある。

3

(1) 分裂前の全運動量

分裂前は静止しているため、速度は 0 m/s である。

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (4\,\text{kg})(0\,\text{m/s}) \\ &= 0\,\text{kg m/s} \end{aligned}$$

答えは 0 kg m/s である。

(2) 分裂直後の進行方向

系を A+B、右向きを正とする。分裂の直前から直後までの水平外力の力積は 0 なので、

$$(1\,\mathrm{kg})v_A + (3\,\mathrm{kg})v_B = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

したがって、

$$(1\,\mathrm{kg})v_A = -(3\,\mathrm{kg})v_B$$

である。

A と B はどちらも動いているため、速度の符号は互いに反対になる。

よって、**A と B は反対向きに進む**。

(3) 速さの比

A と B の速さをそれぞれ s_A、s_B とすると、分裂直後の運動量の大きさは等しいため、

$$(1\,\mathrm{kg})s_A = (3\,\mathrm{kg})s_B$$

となる。

したがって、

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{3\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg}} = 3$$

である。

答えは、

$$s_A : s_B = 3 : 1$$

となる。

A の質量は B の 3 分の 1 なので、A の速さは B の 3 倍である。

(4) 速さの絶対値が決まるか

この条件だけでは決まらない。

運動量保存からは、

$$s_A = 3s_B$$

という関係が得られるが、それぞれの速さの具体的な数値は確定しない。

たとえば B の速さを正の未知量 s と置けば、A の速さは $3s$ と表せる。しかし、s の値そのものを決める条件は与えられていない。

具体的な数値を求めるには、次のような追加条件が必要である。

- A または B の分裂直後の速さが与えられる。
- 分裂後の運動エネルギーの和が与えられる。

後者の場合は、運動エネルギーがどれだけ与えられたかが新たな条件になる。**運動エネルギーの和が保存すると勝手に仮定してはならない**。

本問の条件から確定できるのは、進行方向が反対であることと、速さの比が 3 : 1 であることまでである。

4

(1) 衝突直前の全運動量

系は A+B、右向きを正とする。

A の速度は $+4\,\mathrm{m/s}$、B は静止しているため、

$$\begin{aligned} P_{\text{前}} &= (1\,\mathrm{kg})(+4\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= +4\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

答えは $+4\,\mathrm{kg\,m/s}$ である。

(2) 衝突直後の全運動量

本問では、衝突中に系が受ける外力の力積が、

$$J_{\text{ext}} = -1\,\mathrm{N\,s}$$

と与えられている。

力積の単位 $\mathrm{N\,s}$ は運動量の単位 $\mathrm{kg\,m/s}$ と等しいため、

$$-1\,\mathrm{N\,s} = -1\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

運動量と力積の関係から、

$$P_{\text{後}} = P_{\text{前}} + J_{\text{ext}}$$

となる。

値を代入すると、

$$\begin{aligned} P_{\text{後}} &= +4\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &\quad +(-1\,\mathrm{kg\,m/s}) \\ &= +3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

答えは $+3\,\mathrm{kg\,m/s}$ となる。

(3) 合体直後の共通速度

合体後の全質量は、

$$1\,\mathrm{kg}+1\,\mathrm{kg}=2\,\mathrm{kg}$$

である。

共通速度を V とすると、

$$(2\,\mathrm{kg})V=+3\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$V=+1.5\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、答えは **右向きに** $1.5\,\mathrm{m/s}$ である。

(4) 外力の力積を無視した場合

誤って全運動量がそのまま保存すると仮定すると、

$$(2\,\mathrm{kg})V=+4\,\mathrm{kg\,m/s}$$

より、

$$V=+2\,\mathrm{m/s}$$

となる。

しかし、本問では衝突中に外部から左向きの力積 $-1\,\mathrm{N\,s}$ が作用している。

そのため、系全体の運動量は $+4\,\mathrm{kg\,m/s}$ から $+3\,\mathrm{kg\,m/s}$ へ変化する。

よって、外力の力積を無視して得られる $+2\,\mathrm{m/s}$ は誤りであり、正しい共通速度は $+1.5\,\mathrm{m/s}$ である。

合体という現象だけを根拠に運動量保存を適用してはならない。 先に系と外力の力積を確認する必要がある。

5

(1) 誤り

系全体の運動量が保存しても、A と B それぞれの運動量が保存するとは限らない。

衝突中には A と B の間で力が働き、両物体の運動量が変化することがある。

作用と反作用による力積は、A+B を合わせた系では打ち消し合う。したがって、全運動量は保存しても、個々の運動量は変化し得る。

(2) 誤り

質量が異なる場合、初速度の単純平均だけでは合体後の共通速度を一般には求められない。

合体後の共通速度は、水平外力の力積を無視できる条件で、

$$V=\frac{m_Au_A+m_Bu_B}{m_A+m_B}$$

によって求める。

2 物体の質量が等しい場合には、初速度の値によらず、符号付き初速度の単純平均と一致する。

(3) 正しい

分裂前の物体は静止しているため、系全体の運動量は 0 kg m/s である。

分裂中の水平外力の力積が 0 ならば、

$$m_A v_A + m_B v_B = 0$$

となる。

したがって、

$$m_A v_A = -m_B v_B$$

であり、分裂直後の 2 物体の運動量は等しい大きさで反対向きになる。

(4) 誤り

全運動量の保存は、運動エネルギーの和が保存することを意味しない。

合体では運動エネルギーの一部が変形や熱などに移ることがあり、分裂では内部エネルギーが運動エネルギーに移ることがある。

したがって、外力の力積を無視できて全運動量が保存していても、運動エネルギーの和は減少または増加し得る。

(5) 誤り

静止していた物体が 2 つに分裂して両方が動く場合と、すでに運動していた物体が分裂する場合では、分裂前の全運動量が異なる。

運動中の物体では、分裂前の全運動量が一般に 0 ではない。

分裂後の 2 物体が同じ向きに進んでも、運動量の和が分裂前と等しくなる場合がある。

したがって、分裂後の物体が必ず反対向きに進むとはいえない。

(6) 誤り

全運動量保存は、衝突後の 2 物体の運動量の和を制約する関係である。

しかし、それだけでは衝突後の 2 物体が同じ速度になるとは限らない。

合体後の共通速度 V を使うには、問題で「衝突後に一体となって進む」という条件が必要である。

合体条件がない場合には、各物体が異なる速度で運動する可能性も考えなければならない。

©ミライコーチング