

第 53 講 基本的な作図と作図の理由

学習目標

- ・ 定規とコンパスを使って、線分の垂直二等分線を作図できる。
- ・ 角の二等分線を作図できる。
- ・ 直線上の点を通る垂線や、直線外の点から下ろす垂線を作図できる。
- ・ 作図が正しい理由を、「等距離」や「合同」を使って説明できる。

作図では「なぜその線になるか」まで考える

作図は長さを測って合わせる操作ではない

定規とコンパスによる作図では、目盛りを使って長さや角度を測るのではなく、

- ・ 定規で 2 点を通る直線を引く
- ・ コンパスで同じ長さを移す
- ・ 円や円弧の交点を利用する

という操作を組み合わせます。

特に重要なのが、コンパスによって作られる等しい長さです。

同じコンパスの開きで円弧をかけば、その中心から円弧上の点までの距離は等しくなります。

この「等距離」を利用すると、垂直二等分線や角の二等分線、垂線を作ることができます。

基本作図の共通する考え

基本作図では、

同じ半径の円弧をかく → 等しい長さができる → 等距離や合同を利用する

という流れが何度も現れます。

操作を暗記するだけでなく、「どの長さが等しくなるのか」を確認します。

線分の垂直二等分線

垂直二等分線

線分 AB の中点を通り、 AB に垂直な直線を、線分 AB の垂直二等分線といいます。

垂直二等分線上の点は、 A と B からの距離が等しくなります。

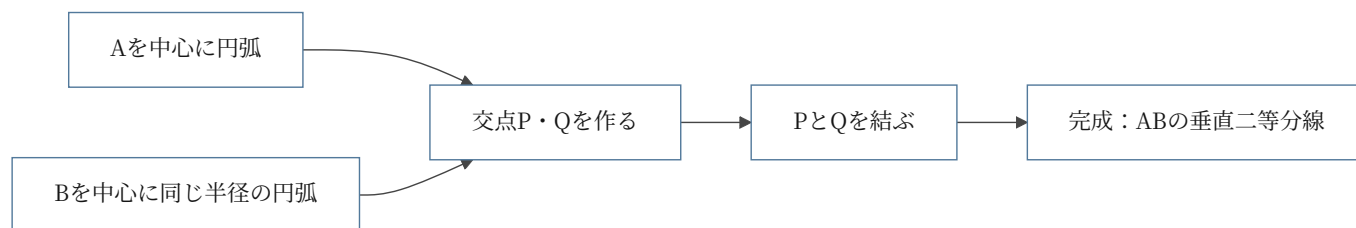
逆に、 A と B から等距離にある点は、線分 AB の垂直二等分線上にあります。

垂直二等分線の作図手順

線分 AB の垂直二等分線を作図します。

1. コンパスを、線分 AB の半分より大きく開く。
2. A を中心として、線分の上下に円弧をかく。
3. コンパスの開きを変えずに、 B を中心として円弧をかく。
4. 2 組の円弧の交点を P, Q とする。
5. 定規で直線 PQ を引く。

直線 PQ が、線分 AB の垂直二等分線です。



なぜ垂直二等分線になるのか

同じコンパスの開きで円弧をかいているので、

$$PA = PB$$

です。

同様に、

$$QA = QB$$

です。

つまり、 P も Q も A と B から等距離にある点です。

A と B から等距離にある点は線分 AB の垂直二等分線上にあるので、 P と Q を通る直線は AB の垂直二等分線になります。

垂直二等分線を保証する 2 つの等距離

作図の理由の中心は、

$$PA = PB$$

と、

$$QA = QB$$

です。

2 つの交点 P, Q がともに A, B から等距離だから、直線 PQ が垂直二等分線になります。

コンパスの開きを途中で変えない

A を中心にした円弧と B を中心にした円弧は、同じ半径でかきます。

半径を変えると $PA = PB$ や $QA = QB$ が保証されず、正しい垂直二等分線になりません。

角の二等分線

角の二等分線

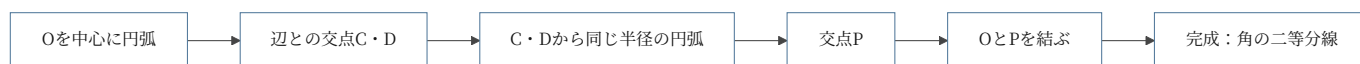
1 つの角を大きさの等しい 2 つの角に分ける半直線を、その角の二等分線といいます。

角の二等分線の作図手順

$\angle AOB$ の二等分線を作図します。

1. O を中心として円弧をかき、辺 OA, OB との交点をそれぞれ C, D とする。
2. C, D を中心として、同じ半径の円弧を角の内側にかく。
3. その 2 つの円弧の交点を P とする。
4. 定規で半直線 OP を引く。

半直線 OP が $\angle AOB$ の二等分線です。



なぜ角を二等分できるのか

最初に O を中心として円弧をかいたので、

$$OC = OD$$

です。

次に、 C, D を中心として同じ半径の円弧をかいたので、

$$CP = DP$$

です。

さらに OP は共通です。

したがって、三角形 OCP と三角形 ODP は、3 組の辺がそれぞれ等しいので合同です。

よって、

$$\angle COP = \angle POD$$

となります。

C は辺 OA 上、 D は辺 OB 上なので、 OP は $\angle AOB$ を等しい 2 つの角に分けます。

角の二等分線では合同を作る

角の二等分線の作図では、

- $OC = OD$
- $CP = DP$
- OP は共通

から 2 つの三角形を合同にします。

合同から 2 つの角が等しいことを示すのが、作図の理由です。

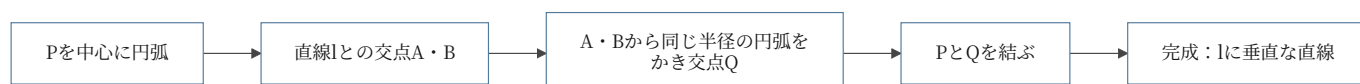
直線上の点を通る垂線

垂直二等分線を利用する

直線 l 上に点 P があり、 P を通る l の垂線を作図します。

1. P を中心として円弧をかき、直線 l との交点を A, B とする。
2. A, B を中心として、同じ半径の円弧をかく。
3. その円弧の交点の 1 つを Q とする。
4. 直線 PQ を引く。

直線 PQ が、点 P を通る直線 l の垂線です。



なぜ垂直になるのか

P を中心とした円弧で A, B をとったので、

$$PA = PB$$

です。

また、 A, B を中心に同じ半径の円弧をかいたので、

$$QA = QB$$

です。

したがって、 P, Q はともに A, B から等距離にあります。
 よって直線 PQ は線分 AB の垂直二等分線です。
 A, B は直線 l 上にあるので、 PQ は l に垂直です。

新しい作図ではなく垂直二等分線の利用

直線上の点を通る垂線も、考え方の中心は垂直二等分線です。
 $PA = PB$ となるように A, B を作り、さらに $QA = QB$ となる点 Q を作っています。

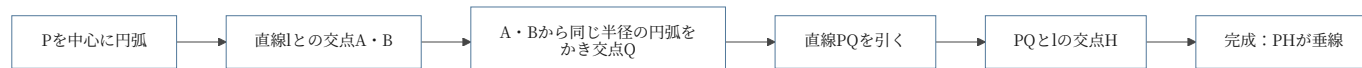
直線外の点から垂線を下ろす

外部の点を等距離の点として利用する

直線 l の外部に点 P があり、 P から l へ垂線を引きます。

1. P を中心とする円弧をかき、直線 l との 2 つの交点を A, B とする。
2. A, B を中心として、同じ半径の円弧を P と反対側にかく。
3. その 2 つの円弧の交点を Q とする。
4. 直線 PQ を引く。
5. PQ と l の交点を H とする。

このとき、 PH が点 P から直線 l へ下ろした垂線です。



なぜ P からの垂線になるのか

P を中心として A, B を作ったので、

$$PA = PB$$

です。

また、同じ半径の円弧から、

$$QA = QB$$

です。

したがって、 P, Q はともに線分 AB の垂直二等分線上にあります。

よって直線 PQ は AB に垂直です。

A, B は直線 l 上にあるため、 PQ は l に垂直です。

その交点を H とすれば、 PH は点 P から直線 l へ下ろした垂線になります。

完成する線と補助の円弧を区別する

作図では、多くの円弧や交点を作りますが、それらすべてが最終的な答えではありません。

- ・ 円弧は等しい長さを作るための補助
- ・ 円弧の交点は完成する直線を決めるための点
- ・ 最後に定規で引いた直線が求める線

という役割を区別します。

作図の理由を説明する型

理由は等しい長さから始める

作図の理由を説明するときは、次の順に整理すると書きやすくなります。

1. 同じ半径の円弧だから等しい長さを示す。
2. その等しい長さから、等距離または三角形の合同を示す。
3. 等距離なら垂直二等分線、合同なら等しい角を導く。
4. したがって、作図した線が目的の線であると結論づける。

作図では操作と理由を対応させる

たとえば「同じ半径で円弧をかく」という操作には、

中心から交点までの長さを等しくする

という目的があります。

円弧をかくこと自体が答えなのではなく、その結果として生まれる等しい長さが、作図が正しいことを保証しています。

基本作図では、「この操作で何が等しくなったか」を1つずつ確認すると理由を説明できます。

例題

例題 1

線分 AB の垂直二等分線を作図するため、 A, B を中心として同じ半径の円弧をかき、その2つの交点を P, Q としました。
なぜ直線 PQ が線分 AB の垂直二等分線になるのか説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

A, B を中心として同じ半径の円弧をかいているので、 $PA = PB$ です。

同じ理由で、 $QA = QB$ です。

したがって、 P, Q はどちらも A と B から等距離にある点です。

A, B から等距離にある点は線分 AB の垂直二等分線上にあるので、 P, Q を通る直線 PQ は線分 AB の垂直二等分線です。

例題 2

$\angle AOB$ の二等分線を作図しました。

O を中心とする円弧と辺 OA, OB との交点を C, D とし、さらに C, D を中心として同じ半径の円弧をかき、その交点を P としました。

なぜ OP が $\angle AOB$ の二等分線になるのか、三角形の合同を使って説明しなさい。

例題 2 の解答・解説

O を中心とした同じ円弧上に C, D があるので、 $OC = OD$ です。
また、 C, D を中心として同じ半径の円弧をかいたので、 $CP = DP$ です。
さらに、 OP は 2 つの三角形に共通です。
したがって、三角形 OCP と三角形 ODP は 3 組の辺がそれぞれ等しいので合同です。
よって、 $\angle COP = \angle POD$ です。
したがって、 OP は $\angle AOB$ の二等分線です。

例題 3

直線 l 上の点 P を通る垂線を作図します。
 P を中心とする円弧と l との交点を A, B とし、 A, B を中心とする同じ半径の円弧の交点を Q としました。
なぜ直線 PQ が l に垂直になるのか説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

P を中心とする円弧から A, B をとっているの、 $PA = PB$ です。
また、 A, B を中心として同じ半径の円弧をかいているので、 $QA = QB$ です。
したがって、 P, Q はどちらも A, B から等距離にあります。
よって、直線 PQ は線分 AB の垂直二等分線です。
 A, B は直線 l 上にあるので、 PQ は l に垂直です。

演習問題

練習問題 1

線分 AB の垂直二等分線を作図するとき、 A, B を中心としてかく 2 つの円弧の半径を同じにするのはなぜですか。
等距離という言葉を使って説明しなさい。

練習問題 2

線分 AB の垂直二等分線を作図し、2 つの円弧の交点の 1 つを P としました。
このとき PA と PB の関係を答え、その理由を説明しなさい。

練習問題 3

$\angle AOB$ の二等分線の作図で、最初に O を中心とする円弧をかき、辺 OA, OB との交点を C, D としました。
この操作から分かる長さの関係を答えなさい。

練習問題 4

角の二等分線の作図で、

$$OC = OD, \quad CP = DP$$

であり、 OP が共通であることが分かっています。

このとき、三角形 OCP と三角形 ODP について何がいえですか。また、それによってどの 2 つの角が等しいと分かりますか。

練習問題 5

直線 l 上の点 P を通る垂線を作図するとき、まず P を中心とする円弧と l との交点を A, B とします。

なぜ P は線分 AB の垂直二等分線上にあるといえますか。

練習問題 6

直線 l の外部の点 P から垂線を下ろす作図で、 P を中心とする円弧と l との交点を A, B とします。

さらに A, B を中心とする同じ半径の円弧の交点を Q とします。

P, Q を結んだ直線が l に垂直になる理由を説明しなさい。

練習問題 7

ある生徒は、線分 AB の垂直二等分線を作図するとき、 A を中心とする円弧と B を中心とする円弧を、異なる半径でかきました。

この操作では正しい垂直二等分線が保証されない理由を説明しなさい。

練習問題 8

次の作図で、最後に完成する線を答えなさい。

1. $\angle AOB$ の辺 OA, OB と、 O を中心とする円弧との交点を C, D とする。
2. C, D を中心として同じ半径の円弧をかき、その交点を P とする。
3. O と P を結ぶ。

練習問題 9

基本作図では、同じ半径の円弧を何度も利用します。

「同じ半径の円弧をかくこと」が、垂直二等分線や角の二等分線を作るうえでなぜ重要なのか、「等しい長さ」「等距離」「合同」のうち 2 つ以上の言葉を使って説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

同じ半径の円弧をかくことで、その交点から A, B までの距離を等しくできます。
たとえば交点を P とすると、 $PA = PB$ となります。
この等距離の性質を使って、交点が線分 AB の垂直二等分線上にあることを示します。

練習問題 2 の解答・解説

$PA = PB$ です。
 P は、 A を中心とする円弧と B を中心とする同じ半径の円弧の交点だからです。
したがって、 P は A, B から等距離にあります。

練習問題 3 の解答・解説

C, D はどちらも、中心 O の同じ円弧上にあります。
したがって、 $OC = OD$ です。

練習問題 4 の解答・解説

三角形 OCP と三角形 ODP では、
• $OC = OD$
• $CP = DP$
• OP は共通
です。
したがって、3 組の辺がそれぞれ等しいので、2 つの三角形は合同です。
よって、対応する角について $\angle COP = \angle POD$ と分かります。

練習問題 5 の解答・解説

A, B は、 P を中心とする同じ円弧と直線 l との交点です。
したがって、 $PA = PB$ です。
 P は A, B から等距離にあるので、線分 AB の垂直二等分線上にあります。

練習問題 6 の解答・解説

P を中心とする円弧から A, B をとっているのだから、 $PA = PB$ です。
また、 A, B を中心とする同じ半径の円弧の交点が Q なのだから、 $QA = QB$ です。
したがって、 P, Q はともに線分 AB の垂直二等分線上にあります。
よって直線 PQ は AB に垂直です。
 A, B は直線 l 上にあるので、 PQ は l に垂直です。

練習問題 7 の解答・解説

2 つの円弧の半径が異なると、交点 P について $PA = PB$ とは限りません。
すると、 P が A, B から等距離にあることを保証できません。
そのため、円弧の交点を結んだ線が線分 AB の垂直二等分線になるとは限りません。

練習問題 8 の解答・解説

最後に完成するのは、 $\angle AOB$ の二等分線 OP です。

$OC = OD$ 、 $CP = DP$ 、 OP は共通なので、三角形 OCP と三角形 ODP は合同になります。

したがって、 $\angle COP = \angle POD$ となります。

練習問題 9 の解答・解説

同じ半径の円弧を使うと、中心から交点までに等しい長さを作ることができます。

その結果、2 点から等距離にある点を作れば垂直二等分線を決めることができます。

また、複数の等しい長さを作って 2 つの三角形を合同にすれば、対応する角が等しいことを示せるので、角の二等分線を作ることができます。