第 184 講 関数の連続性

学習目標

この講では、関数がある点で連続であるための条件を理解し、次のことができるようになることを目標とする。

- 点での値 $f(a)$ と周辺から近づいたときの極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ の違いを説明できる。
- 内点で関数が連続であるための 3 つの条件を確認できる。
- 左右極限を用いて、区分的に定められた関数の連続性を判定できる。
- 閉区間での連続性と中間値の定理の意味を理解し、方程式の解の存在を説明できる。

概念：点の値と周辺の変化をつなぐ

関数の連続性では、ある点での値と、その点の周辺から近づいたときの値が一致しているかを確認する。
例えば、次の 2 つの関数を比較する。

$$f(x) = x + 1$$

$g(x)$ は、$x \neq 0$ のとき $x + 1$ であり、$x = 0$ のとき 3 である。
このとき、どちらも $x = 0$ に近づく周辺の値は 1 に近づくため、$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$、$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ である。
しかし、$f(0) = 1$ であるのに対して、$g(0) = 3$ である。
したがって、極限が存在するだけでは連続とはいえず、周辺から近づいた値とその点での値が一致することが必要である。
有限の範囲で描いた図は、連続かどうかを理解するための補助であり、図だけで連続性の証明を行うものではない。

©ミライコーチング

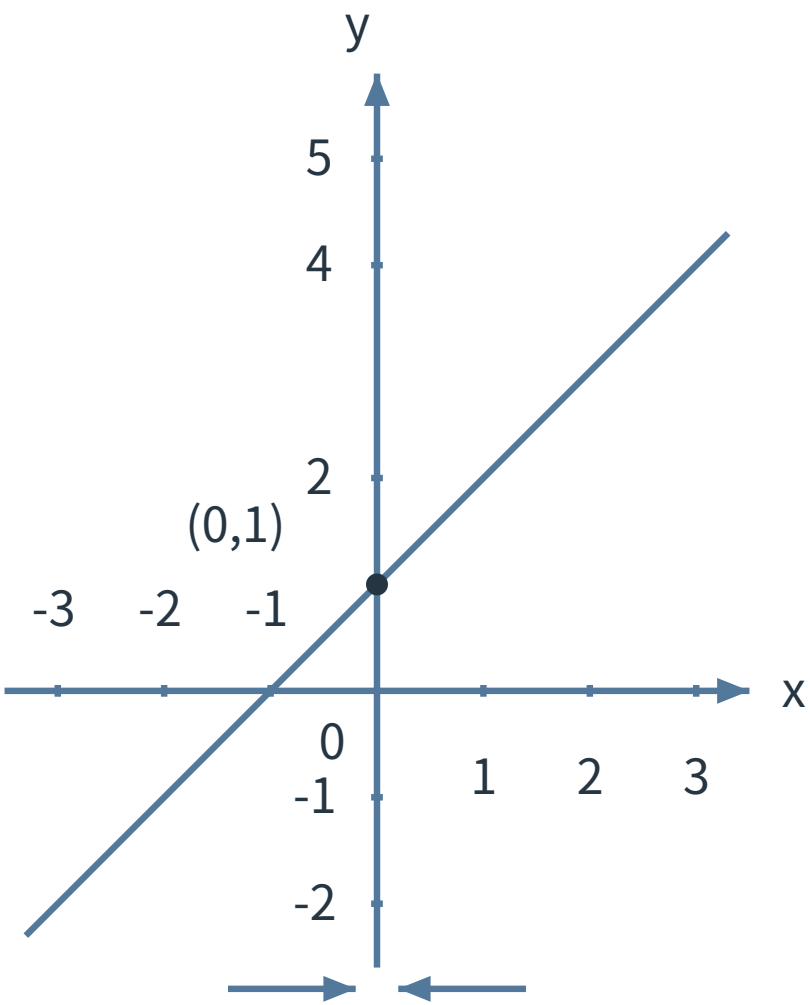

図 1　f(x)=x+1 のグラフの一部である。黒点(0,1)は f(0)=1 を表す。横軸の下の矢印の向きに x を 0 へ近づけると、左右どちらからも f(x)は 1 へ近づき、極限値と点の値が一致する。したがって f は x=0 で連続である。続く g の図も同じ目盛と表示範囲である。

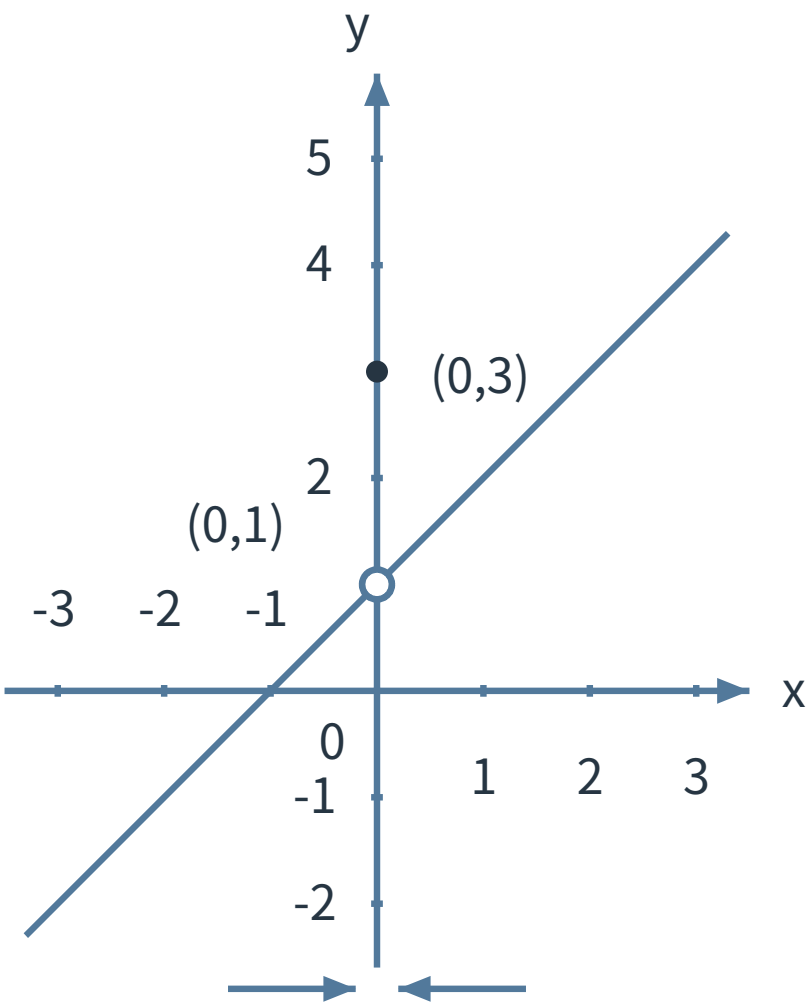

図 2　x≠0 では g(x)=x+1、g(0)=3 である。白丸(0,1)はグラフに含まれない位置、黒点(0,3)は点での関数値を表す。左右どちらから x を 0 へ近づけても g(x)は 1 へ近づくが、g(0)=3 とは一致せず、g は x=0 で不連続である。白丸の円周は除外を表す記号であり、関数曲線ではない。

点での連続性の定義

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを考える。ただし、a は関数の定義域に含まれる内点であり、a を含むある開区間で $f(x)$ が定義されているものとする。
$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは、次の 3 条件をすべて満たすことをいう。
1. $f(a)$ が存在する。
2. 有限な極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在する。
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つ。
連続性とは、周辺から近づいた値と、その点に定められた値が一致していることを表す。

連続性を確認する手順

内点 a における連続性を確認するときは、点での値・左右からの極限・極限と点の値の一致を順に調べる。
1. $f(a)$ が定義されているかを見る。
2. 左右から近づいた極限 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ と $\lim_{x\to a^+} f(x)$ を調べる。
3. 左右極限が一致して両側極限が存在するか確認する。
4. その値が $f(a)$ と一致するか確認する。

極限だけが存在しても、点の値が異なれば連続ではない。

連続性を判断するときの注意

本講では、関数の定義域に属する点について、その点で連続かどうかを判定する。
定義域外の点では $f(a)$ が存在しないため、その点で連続かどうかを判定する対象にはならない。
定義されていない点を安易に不連続な点と考えないようにする。
実数 $a<b$ に対する閉区間 $[a,b]$ での連続性とは、開区間 (a,b) の各内点で連続であり、さらに両端では区間内から近づく片側極限が端点の値と一致することをいう。
つまり、a では $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$、$b$ では $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ を確認する。
区間外にも元の関数が定義されている場合があるため、区間外の定義の有無ではなく、区間内での連続性を判断する。

点の値だけでは直せない場合

左右から近づいた値が一致しない場合は、点での値だけを変更しても連続にはできない。
関数を次で定める。
$h(x)$ は、$x<0$ のとき $x+1$、$x=0$ のとき 2、$x>0$ のとき $x+3$ である。
左側から近づくと $\lim_{x\to 0^-} h(x)=1$ であり、右側から近づくと $\lim_{x\to 0^+} h(x)=3$ である。
左右極限が一致しないため、$\lim_{x\to 0} h(x)$ は存在しない。
したがって、$h(0)$ の値をどのように変更しても、周辺のつながりを作ることはできず、$x=0$ で連続にすることはできない。

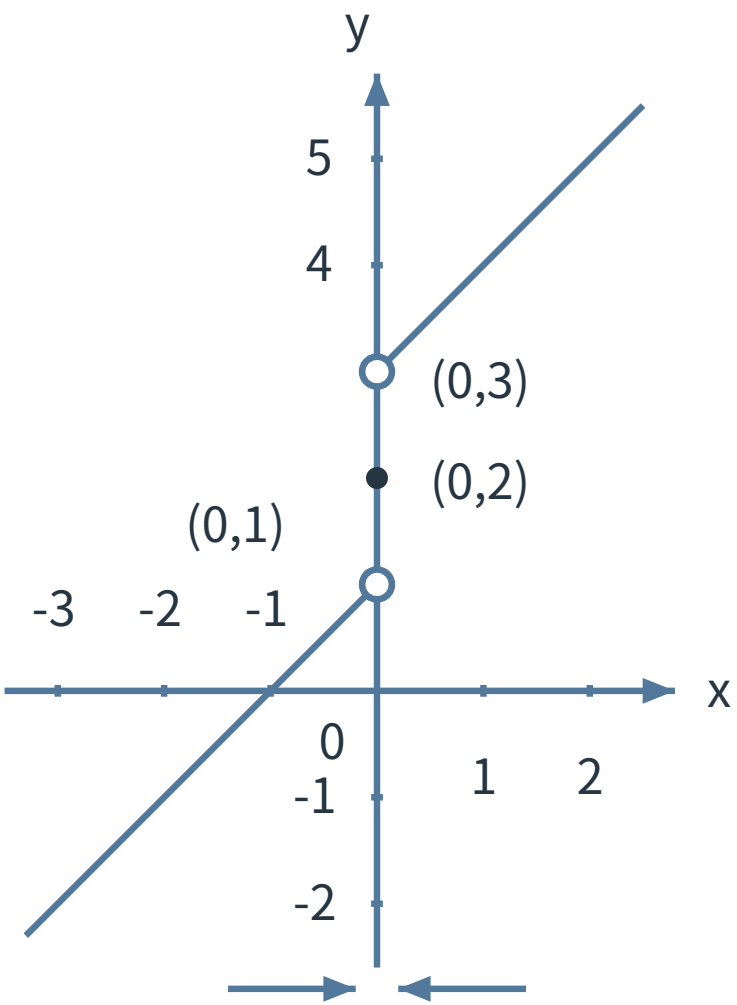

図 3　x<0 では h(x)=x+1、x>0 では h(x)=x+3 であり、h(0)=2 である。白丸(0,1)と(0,3)は各枝に含まれない端の位置、黒点(0,2)は点での関数値を表す。左極限は 1、右極限は 3 で異なるため、h(0)だけを変えても x=0 で連続にはできない。白丸の円周は除外の記号であり、関数曲線ではない。曲線は全体の一部だけを表示している。

基本的な連続関数と性質

多項式関数では、極限の和・差・積の法則を利用して、式を変形した後に極限を求めることができる。

多項式関数、指数関数、対数関数、三角関数などの基本関数は、それぞれの定義域内で連続である。

連続な関数の和・差・積も連続であり、商については分母が 0 になる点を除いて連続である。

$g(x)$ が $x = a$ で連続であり、$f(x)$ が $x = g(a)$ で連続であり、さらに a のある近傍における $g(x)$ の値が $f(x)$ の定義域内に含まれるならば、合成関数 $f(g(x))$ は $x = a$ で連続である。

連続な関数へ代入できることは、毎回定義からすべてを証明して確認するという意味ではない。既に知られている連続関数の性質を利用できるか、または定義から条件を確認できるかを判断して代入する。

閉区間での連続性と中間値の定理

実数 $a < b$ に対して、関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 全体で連続であるとする。
このとき、$\min\{f(a), f(b)\} < k < \max\{f(a), f(b)\}$ を満たす任意の実数 k に対して、$a < c < b$ かつ $f(c) = k$ となる実数 c が存在する。これが中間値の定理である。
これが中間値の定理であり、連続な関数のグラフが途中の値を飛び越えないことを保証している。
特に、$f(a)f(b) < 0$ ならば 0 は $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるため、方程式 $f(x) = 0$ の解が少なくとも 1 つ存在する。
ただし、符号が異なることは零点の存在を保証するための十分条件であり、必要条件ではない。また、中間値の定理が保証するのは解の存在であり、一意性までは保証しない。
図は定理のイメージを理解するための補助であり、図だけで証明するものではない。

例題 1

関数を次で定める。
$f(x)$ は、$x \neq 2$ のとき $\frac{x^2-4}{x-2}$ であり、$x = 2$ のとき k である。
この関数が $x = 2$ で連続になるような実数 k を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$x = 2$ で連続にするには、周辺から近づいた極限と点での値を一致させる必要がある。
$x \neq 2$ では、次の変形が成り立つ。

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

したがって、極限は $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ である。
一方、点での値は $f(2) = k$ である。
連続条件より $k = 4$ が必要である。
実際に $k = 4$ とすると、点での値と極限がともに 4 になり、3 つの連続条件を満たす。
よって、求める実数は $k = 4$ である。

例題 2

関数を次で定める。
$g(x)$ は、$x < 1$ のとき $x^2 + a$ であり、$x \geq 1$ のとき $bx + 1$ である。
この関数が $x = 1$ で連続になるための、実数 a, b の条件を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$x = 1$ で連続にするには、左側から近づいた値、右側から近づいた値、点での値をすべて確認する。
左極限は $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 + a$ である。
右側では $g(x) = bx + 1$ であり、これは多項式関数なので $x \to 1^+$ の極限は $\lim_{x \to 1^+} g(x) = b + 1$ となる。一方、$x = 1$ は右側の枝に含まれるため、点での値は $g(1) = b + 1$ である。
したがって、左右極限が一致し、さらに点での値と一致する条件は $1 + a = b + 1$ である。
整理すると $a = b$ となる。
逆に、任意の実数 a, b が $a = b$ を満たすならば、左極限・右極限・点での値はすべて同じ値になるため、$x = 1$ で連続である。
よって、必要十分な条件は $a = b$ である。

©ミライコーチング

例題 3

方程式 $x^3 + x - 1 = 0$ が区間 $(0, 1)$ に少なくとも 1 つ実数解をもつことを示せ。

例題 3 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 + x - 1$ を考える。
$f(x)$ は多項式関数であるため、区間 $[0, 1]$ で連続である。
端点の値は $f(0) = -1$、$f(1) = 1$ であり、$f(0)f(1) < 0$ が成り立つ。
したがって、中間値の定理より、区間 $(0, 1)$ に $f(c) = 0$ を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する。
よって、方程式 $x^3 + x - 1 = 0$ は区間 $(0, 1)$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ。
なお、この議論で分かるのは解の存在であり、解が一意であることまでは示していない。

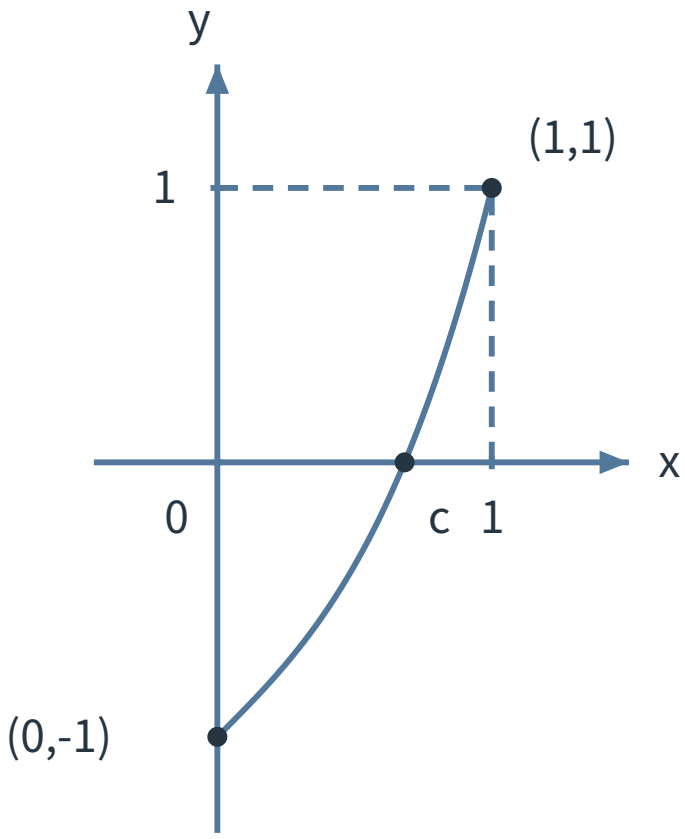

図 4　実線は f(x)=x³+x−1 を区間[0,1]で表示したグラフである。両端の値は f(0)=−1 と f(1)=1 であり、0 はその間にある。横軸上の c は f(c)=0 となる点の x 座標で、0<c<1 である。零点の存在は区間[0,1]での連続性と中間値の定理から保証される。図から正確な解を読み取る必要はなく、図そのものを証明には用いない。

演習問題

演習問題 1

関数を次で定める。
$f(x)$ は、$x \neq 1$ のとき $x^2 + ax + 1$ であり、$x = 1$ のとき 3 である。
この関数が $x = 1$ で連続になるような実数 a の値を求めよ。

演習問題 2

関数を次で定める。
$g(x)$ は、$x \neq 3$ のとき $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ であり、$x = 3$ のとき k である。
この関数が $x = 3$ で連続になるような実数 k の値を求めよ。

演習問題 3

関数を次で定める。
$h(x)$ は、$x < 2$ のとき $2x + a$ であり、$x \geq 2$ のとき $x^2 - 1$ である。
この関数が $x = 2$ で連続になるような実数 a の値を求めよ。

演習問題 4

関数を次で定める。
$p(x)$ は、$x < 0$ のとき $x + 2$、$x = 0$ のとき k、$x > 0$ のとき $x + 5$ である。
この関数について、実数 k の値をどのように選んでも $x = 0$ で連続にできない理由を説明せよ。

演習問題 5

関数を次で定める。

$$r(x) = \sqrt{x + 1}$$

この関数について、定義域 $[-1, \infty)$ の端点 $x = -1$ で連続であることを説明せよ。

演習問題 6

関数を次で定める。

$$s(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

この関数について、連続である範囲を答えよ。

©ミライコーチング

演習問題 7

関数を次で定める。

$$F(x) = x^3 - 2x - 1$$

この関数について、方程式 $F(x) = 0$ が区間 $(1, 2)$ に少なくとも 1 つ実数解をもつことを中間値の定理を用いて示せ。

演習問題 8

区間 $[0, 2]$ で連続でない関数では、端点の値の符号だけを見ても零点の存在を保証できないことを説明せよ。
具体例として、次の関数を用いて考えよ。
$T(x)$ は、$0 \leq x < 1$ のとき 1 であり、$1 \leq x \leq 2$ のとき -1 である。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

$x = 1$ で連続にするには、極限と点での値を一致させる。
$x \neq 1$ の部分から、$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + ax + 1) = a + 2$ である。
点での値は $f(1) = 3$ であるため、連続条件より $a + 2 = 3$ が必要である。
したがって、$a = 1$ である。
実際に $a = 1$ とすると極限は 3 となり、点での値 $f(1) = 3$ と一致するため、$x = 1$ で連続になる。

演習問題 2 の解答・解説

$x = 3$ で連続にするため、周辺からの極限と点での値を一致させる。
$x \neq 3$ では、次の変形が成り立つ。

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

したがって、$\lim_{x \to 3} g(x) = 6$ である。
点での値は $g(3) = k$ なので、連続にするには $k = 6$ が必要である。
実際に $k = 6$ とすれば、極限と点での値がともに 6 になり、連続条件を満たす。
よって、求める実数は $k = 6$ である。

演習問題 3 の解答・解説

$x = 2$ で連続にするため、左極限、右極限、点での値を確認する。
左極限は $\lim_{x \to 2^-} h(x) = 4 + a$ である。
右側の式では $h(2) = 2^2 - 1 = 3$ であり、右極限も $\lim_{x \to 2^+} h(x) = 3$ である。
連続条件より $4 + a = 3$ が必要である。
したがって、$a = -1$ である。
このとき左極限・右極限・点での値がすべて 3 になり、$x = 2$ で連続になる。

演習問題 4 の解答・解説

$x=0$ で連続にするには、左右極限が一致し、その値が点での値 $p(0)=k$ と一致する必要がある。
左極限は $\lim_{x\to 0^-} p(x)=2$ であり、右極限は $\lim_{x\to 0^+} p(x)=5$ である。
左右極限が異なるため、両側極限 $\lim_{x\to 0} p(x)$ は存在しない。
点での値 k を変更しても左右から近づいた値は変わらないため、どのような k を選んでも連続にはできない。

演習問題 5 の解答・解説

端点 $x=-1$ では、定義域内から近づく右側極限を調べる。
点での値は $r(-1)=0$ である。
任意の $\varepsilon>0$ に対して、$-1<x<-1+\varepsilon^2$ を満たす全ての入力では $0<x+1<\varepsilon^2$ である。
このとき $0<\sqrt{x+1}<\varepsilon$ となるため、関数値は 0 に近づく。したがって、$\lim_{x\to -1^+}\sqrt{x+1}=0$ である。
よって、区間内からの片側極限と端点の値が一致し、$x=-1$ で連続である。

演習問題 6 の解答・解説

商の形の関数では、分母が 0 になる点では定義されない。
分母は $x^2-4=(x-2)(x+2)$ と因数分解できる。
したがって、$x=2,-2$ では分母が 0 になるため、定義域から除く必要がある。
それ以外の範囲では、分子と分母は多項式であり、分母が 0 ではないため連続である。
よって、$s(x)$ は $x\neq -2,2$ の範囲で連続である。

演習問題 7 の解答・解説

関数 $F(x)=x^3-2x-1$ は多項式関数であるため、区間 $[1,2]$ で連続である。
端点の値は $F(1)=-2$、$F(2)=3$ であり、$F(1)F(2)<0$ が成り立つ。
したがって、中間値の定理より、$1<c<2$ を満たす実数 c が存在して $F(c)=0$ となる。
よって、方程式 $x^3-2x-1=0$ は区間 $(1,2)$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ。

演習問題 8 の解答・解説

関数 $T(x)$ の端点の値は $T(0)=1$、$T(2)=-1$ であり、$T(0)T(2)<0$ が成り立つ。
しかし、この関数は $x=1$ で連続ではない。
左極限は $\lim_{x\to 1^-} T(x)=1$ であり、右極限は $\lim_{x\to 1^+} T(x)=-1$ である。また、点での値は $T(1)=-1$ である。
さらに、$T(x)$ の値域は $\{1,-1\}$ であるため、$T(x)=0$ となる点は存在しない。
したがって、端点の符号だけでは零点の存在は保証されない。中間値の定理を用いて零点の存在を保証するには、区間全体での連続性を確認する必要がある。

©ミライコーチング