# 第 252 講 積の図形的意味

**学習目標**

- 複素数の積では、絶対値を掛け、偏角を加えることを説明できる。
- 複素数倍を、原点を中心とする拡大・縮小と回転として捉えられる。
- 正の実数、負の実数、純虚数を掛けたときの点の移り方を判断できる。
- 0 を含む場合と含まない場合を区別し、偏角の関係を正しく扱える。

## 1. 実数倍は原点からの距離を変える

### 正の実数を掛けると同じ向きへ伸びる

0 でない複素数 $z = x + yi$ に正の実数 $r$ を掛けると、$rz = rx + ryi$ となる。対応する点の座標は $(x, y)$ から $(rx, ry)$ へ変わるので、原点から見た向きは変わらず、距離は $r$ 倍になる。
$0 < r < 1$ なら原点へ近づき、$r > 1$ なら原点から遠ざかる。どちらも「原点を中心とする $r$ 倍の拡大・縮小」である。

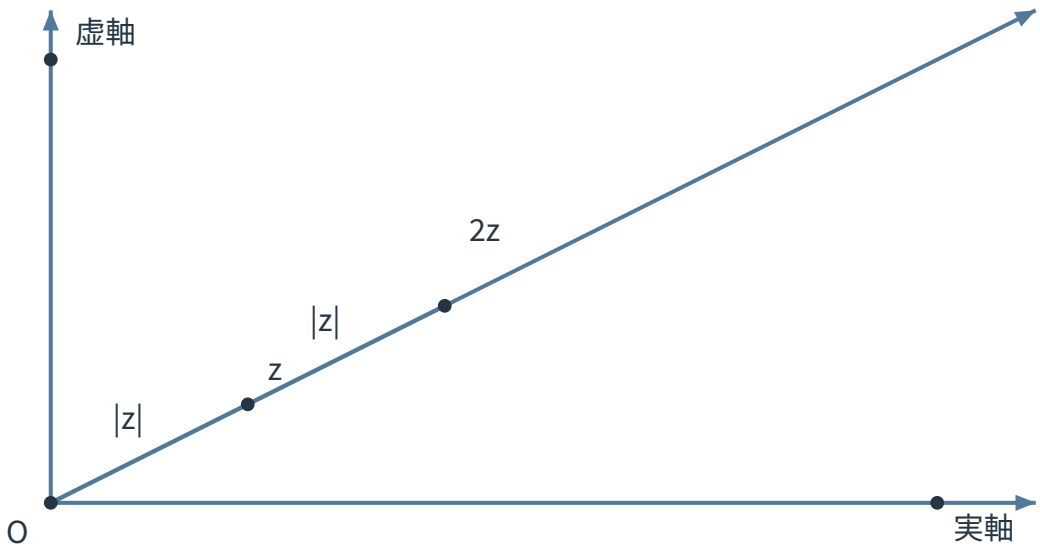


**図 1**　$z$ に正の実数 2 を掛けると同じ半直線上で距離が 2 倍になる

### 負の実数倍は向きも反転する

$-r$（$r > 0$）を掛けることは、まず距離を $r$ 倍し、その後で向きを $\pi$ だけ回すことと同じである。特に $-1$ 倍は、点を原点について対称な点へ移す。

**例題 1：実数倍の図形的意味**

$z = 1 + 2i$ とする。$3z$ と $-2z$ を $a + bi$ の形で表し、それぞれ $z$ に対応する点からどのように移るか説明せよ。

©ミライコーチング

### 例題 1 の解答・解説

$3z = 3 + 6i$ である。正の実数 3 を掛けているので、原点からの向きを保ち、距離を 3 倍した点へ移る。
また、$-2z = -2 - 4i$ である。絶対値 2 を掛けるため距離は 2 倍になり、負号によって向きが $\pi$ だけ回る。したがって、$z$ と反対向きの半直線上にある。

## 2. $i$ を掛けると直角だけ回る

### 座標の変化から回転を読む

$z = x + yi \neq 0$ に $i$ を掛けると、

$$iz = ix + yi^2 = -y + xi$$

となる。点の座標は $(x, y)$ から $(-y, x)$ へ変わる。この変換では原点からの距離が変わらず、向きが反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回る。$-i$ を掛けると時計回りに $\frac{\pi}{2}$、すなわち反時計回りに $3\frac{\pi}{2}$ だけ回る。

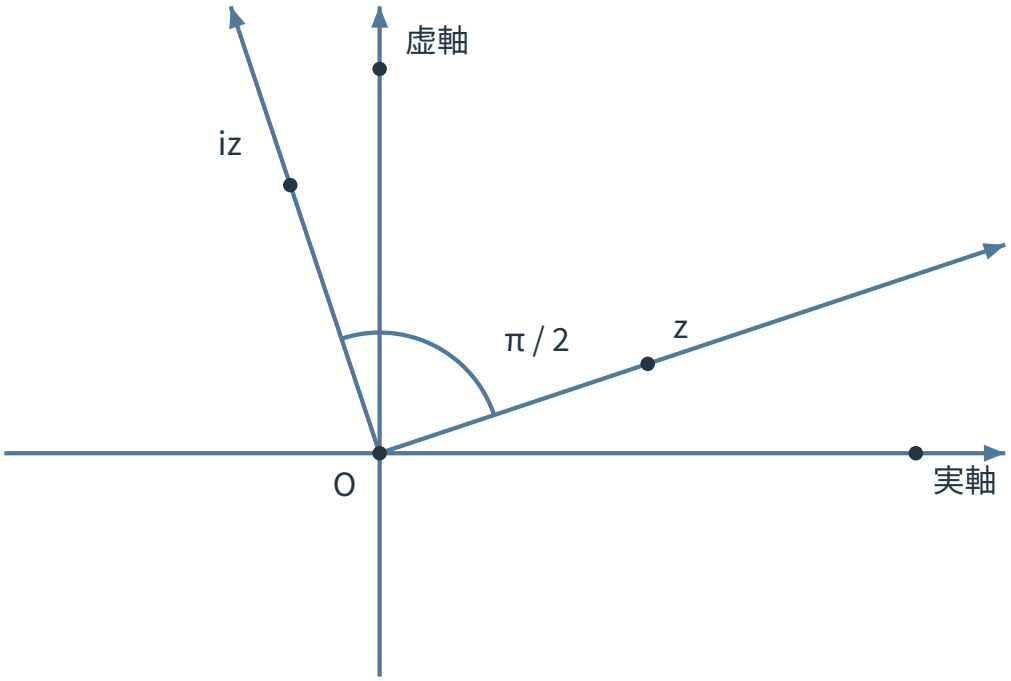


**図 2**　$i$ 倍は原点を中心とする反時計回りの $\frac{\pi}{2}$ 回転である

**例題 2：純虚数倍を図で捉える**

$z = 2 - i$ とする。$iz$ と $-iz$ を $a + bi$ の形で表し、$z$ からの回転の向きを答えよ。

### 例題 2 の解答・解説

$$iz = i(2-i) = 1+2i$$

である。$i$ 倍なので、$z$ に対応する点を原点のまわりに反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回した点である。
また、

$$-iz = -1-2i$$

である。$-i$ 倍なので、時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回した点である。いずれも $|\,i\,| = |\,-i\,| = 1$ であるため、原点からの距離は変わらない。

## 3. 一般の複素数倍は拡大・縮小と回転である

### 極形式を掛けて変化を分ける

$z$ と $w$ をともに 0 でない複素数とし、

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$$

とする。ただし、$r = |\,z\,| > 0$、$s = |\,w\,| > 0$ である。積を展開し、実部側を $A$、虚部側を $B$ とおくと、

$$wz = rs(A + iB)$$

である。ただし、

$$A = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad B = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

である。余弦と正弦の加法定理より、$A = \cos(\alpha+\beta)$、$B = \sin(\alpha+\beta)$ である。よって、

$$wz = rs\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}$$

である。したがって、$w$ を掛けると絶対値は $s = |\,w\,|$ 倍され、偏角は $\beta$ だけ加わる。

**複素数の積の絶対値と偏角**

$z \neq 0$、$w \neq 0$ のとき、

$$|\,wz\,| = |\,w\,|\,|\,z\,|$$

である。また、偏角は $2\pi$ の整数倍の違いを同じ向きと考えて、

$$\arg(wz) \equiv \arg w + \arg z \pmod{2\pi}$$

と表せる。すなわち、複素数 $w$ を掛ける操作は、原点を中心として $|\,w\,|$ 倍し、$\arg w$ だけ回転する操作である。

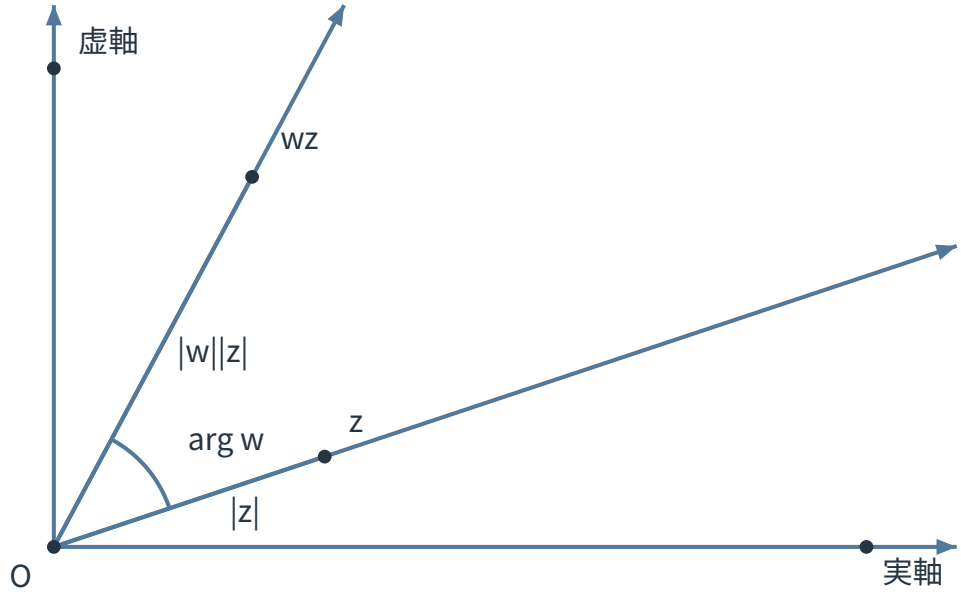


**図 3**　$wz$ は $z$ を $|w|$ 倍し、$\arg w$ だけ回転した点である

### 0 を掛ける場合には回転の向きがない

$w=0$ または $z=0$ なら $wz=0$ である。絶対値の式 $|wz|=|w||z|$ はこの場合にも成り立つが、0 の偏角は定義されない。そのため、偏角を加える式や「何度回転したか」という説明は、掛ける数と掛けられる数がともに 0 でない場合に用いる。

### 例題 3：積を拡大と回転で求める

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ に $w=\sqrt{3}\left(\cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)$ を掛ける。$wz$ を極形式で表し、$z$ に対応する点がどのように移るか説明せよ。

### 例題 3 の解答・解説

絶対値は $2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$、偏角は

$$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

である。したがって、

$$wz=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

である。$w$ を掛けることにより、原点からの距離は $\sqrt{3}$ 倍になり、向きは反時計回りに $2\frac{\pi}{3}$ だけ回る。

# 4. 演習問題

**演習 1：正の実数倍と負の実数倍**

$z=-1+3i$ とする。$2z$ と $-z$ を $a+bi$ の形で表し、それぞれの点の移り方を説明せよ。

**演習 2：$i$ 倍と $-i$ 倍**

$z=3+2i$ とする。$iz$ と $-iz$ を $a+bi$ の形で表せ。また、原点からの距離が変わらないことを確かめよ。

**演習 3：極形式の積**

次の積を極形式で表せ。ただし、偏角は $0\le\theta<2\pi$ の範囲で答えよ。
(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
(2) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

**演習 4：掛ける数から移り方を読む**

$w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ とする。0 でない複素数 $z$ に $w$ を掛けると、$z$ に対応する点はどのように移るか説明せよ。

**演習 5：移り方から掛ける数を決める**

原点からの距離を 3 倍し、反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ だけ回転させる複素数倍を考える。掛ける複素数 $w$ を極形式と $a+bi$ の形でそれぞれ表せ。

**演習 6：積の点を求める**

$z=1+\sqrt{3}i$、$w=-\sqrt{3}+i$ とする。
(1) $z$ と $w$ を極形式で表せ。ただし、偏角は $0\le\theta<2\pi$ の範囲で答えよ。
(2) 極形式を用いて $wz$ を求め、$z$ に対応する点から $wz$ に対応する点への移り方を説明せよ。

# 5. 演習の解答・解説

## 演習 1 の解答・解説

$2z=-2+6i$ である。正の実数 2 を掛けているので、向きはそのままで原点からの距離が 2 倍になる。
$-z=1-3i$ である。$-1$ を掛けているので、距離は変わらず、原点のまわりに $\pi$ だけ回転した点、すなわち原点について対称な点へ移る。

## 演習 2 の解答・解説

$$iz = i(3+2i) = -2+3i, \qquad -iz = 2-3i$$

である。また、

$$|\,z\,| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}, \quad |\,iz\,| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}, \quad |\,-iz\,| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$$

なので、原点からの距離は変わらない。$iz$ は反時計回りに $\frac{\pi}{2}$、$-iz$ は時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点である。

## 演習 3 の解答・解説

(1) 絶対値は $2\cdot 3 = 6$、偏角は $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = 7\frac{\pi}{12}$ である。したがって、

$$6\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

である。

(2) 絶対値は $4\cdot\frac{1}{2} = 2$、偏角の和は

$$\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{3}$$

である。指定された範囲に直すと $7\frac{\pi}{3}-2\pi = \frac{\pi}{3}$ なので、

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である。

## 演習 4 の解答・解説

$|\,w\,| = \sqrt{2}$、$w$ の偏角の 1 つは $7\frac{\pi}{4}$ である。$7\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ なので、$w$ を掛けると原点からの距離は $\sqrt{2}$ 倍になり、時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転する。反時計回りに $7\frac{\pi}{4}$ 回転すると説明しても同じ移り方である。

## 演習 5 の解答・解説

距離を 3 倍するので $|\,w\,| = 3$、反時計回りに $2\frac{\pi}{3}$ 回転するので偏角は $2\frac{\pi}{3}$ である。したがって、

$$w = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

である。$\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$、$\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、

$$w = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

である。

©ミライコーチング

## 演習 6 の解答・解説

(1) $|z|=2$ であり、$z$ は第 1 象限にあるので、

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である。$|w|=2$ であり、$w$ は第 2 象限にあるので、

$$w=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

である。
(2) 絶対値は $2\cdot 2=4$、偏角は

$$\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

なので、

$$wz=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}-2i$$

である。$w$ を掛けたため、$z$ に対応する点は原点からの距離が 2 倍になり、反時計回りに $5\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点へ移る。