

第 26 講 関数とグラフ

学習目標

- 2 つの数量の対応から、関数であるかどうかを判断できる。
- $y = f(x)$ の意味を理解し、 x の値から対応する y の値を求められる。
- 関数の対応を座標 (x, y) として表せる。
- グラフ上の点から、 x と y の対応を読み取れる。

関数は「1 つ決めると、もう 1 つが決まる」関係

数量の対応を見る

ある正方形の 1 辺の長さを x cm、周の長さを y cm とします。
1 辺が 2 cm なら周の長さは 8 cm、1 辺が 5 cm なら周の長さは 20 cm です。
この関係は、

$$y = 4x$$

と表せます。

x の値を 1 つ決めると、それに対応する y の値がただ 1 つに決まります。

数学では、このような関係を**関数**といいます。

大切なのは、式の形ではなく、**ある変数の値を 1 つ決めたとき、もう一方の変数の値がただ 1 つに決まるか**を見ることです。

関数

2 つの変数 x, y があり、 x の値を 1 つ決めると、それに対応して y の値がただ 1 つに決まるとき、 y は x の**関数**であるといいます。

関数になる対応

$y = 2x + 1$ とします。

$x = 0$ なら $y = 1$ 、 $x = 2$ なら $y = 5$ です。

どの x に対しても、対応する y は 1 つだけなので、 y は x の関数です。

1 つの x に 2 つ以上の y が対応するなら関数ではない

ある x の値に対して、 y の値が 2 つ以上対応する関係は、 y が x の関数であるとはいいません。
関数かどうかを判断するときは、「 y が何種類あるか」ではなく、**1 つの x に対して y がただ 1 つに決まるか**を確認します。

変数と値の対応

x が変わると y も変わる

$y = 3x - 2$ という関数を考えます。

x にいくつかの値を入れると、次のようになります。

x	$y = 3x - 2$
-1	-5
0	-2
1	1
2	4

x の値が変わると、それに対応して y の値も変わります。
このように、いろいろな値を取る文字を**変数**といいます。

対応を調べる基本手順

関数の式が与えられたら、次のように考えます。

1. x の値を確認する。
2. その値を式へ代入する。
3. 対応する y の値を求める。

関数では、 x と y の対応を 1 組ずつ確かめることが基本です。

関数を $y = f(x)$ と表す

$f(x)$ は x に対応する y の値

関数を表すとき、

$$y = f(x)$$

と書くことがあります。

$f(x)$ は「 x を決めたときに対応する y の値」を表す記号です。

たとえば、

$$f(x) = 2x + 3$$

なら、 $f(4)$ は $x = 4$ に対応する値なので、

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

です。

$f(4)$ は f と 4 の掛け算ではありません。「関数 f に 4 を入れたときの値」という意味です。

関数の値

関数 $y = f(x)$ で、 $x = a$ に対応する y の値を $f(a)$ と表します。

この $f(a)$ を、 $x = a$ における**関数の値**といいます。

$f(x)$ を積と考える

$f(x)$ は $f \times x$ ではありません。

たとえば $f(x) = x^2 + 1$ のとき、 $f(3) = 3^2 + 1 = 10$ です。

かっこの中の数を、関数の式にある x へ代入します。

対応を座標で表す

1 組の対応が 1 つの点になる

関数 $y = 2x + 1$ で、 $x = 1$ のとき $y = 3$ です。

この対応は、座標を使って

$$(1, 3)$$

と表せます。

同じように、 $x = 2$ のとき $y = 5$ なので、対応する点は $(2, 5)$ です。

つまり、関数の 1 組の対応 (x, y) は、座標平面上の 1 つの点として表せます。

関数のグラフは、このような対応する点を集めて表したものです。

関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ について、対応する x と y の組を座標 (x, y) として座標平面上に表したものを、その関数のグラフといいます。

グラフは対応を目で見るためのもの

式とグラフは同じ対応を表す

関数 $y = x + 1$ を考えます。

$x = -1, 0, 1, 2$ に対応する y は、それぞれ $0, 1, 2, 3$ です。

この対応を座標平面に表すと、点 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ が並びます。

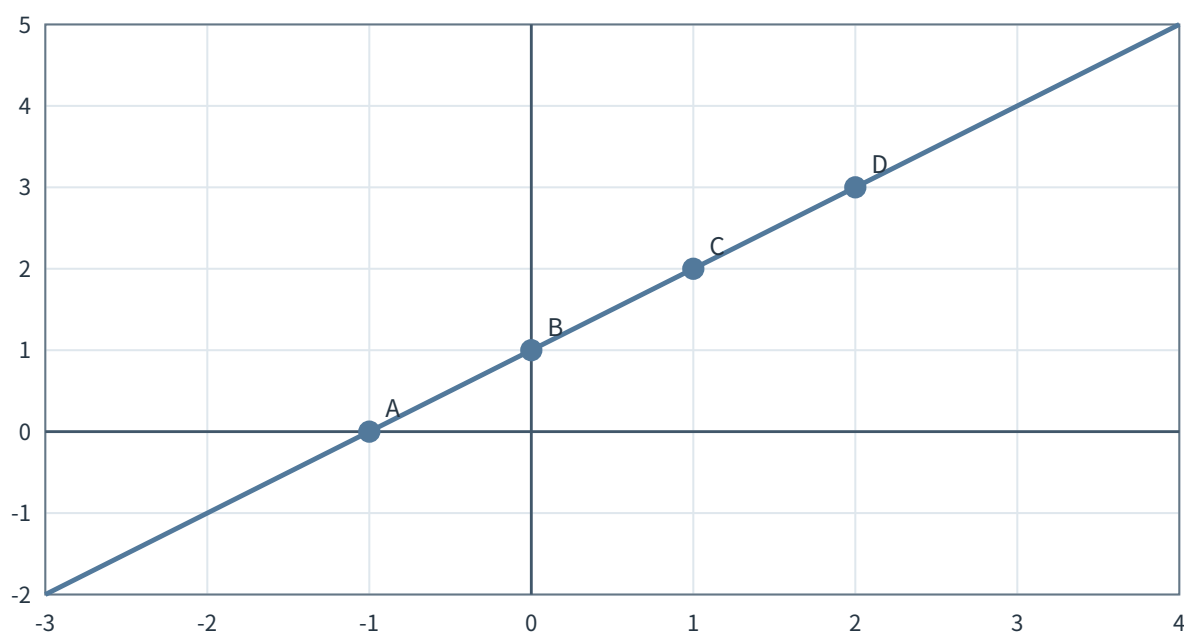


図1 関数 $y = x + 1$ のグラフと対応する点

式 $y = x + 1$ とグラフは別々の情報ではありません。

式は対応を計算で表し、グラフは同じ対応を図として表しています。

グラフ上の点が表す意味

点 (a, b) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあるなら、

$$b = f(a)$$

です。

つまり、「 $x = a$ のとき $y = b$ が対応する」という意味です。

グラフから値を読む

x から y を読むことも、 y から x を探すこともできる

グラフでは、 x の値を決めて、その点の高さから y の値を読むことができます。逆に、「 $y = 3$ になるのはどの x か」のように、ある高さに対応する x を探すこともできます。ただし、関数であるために必要なのは、1つの x に対して y がただ1つに決まることです。同じ y に複数の x が対応することはあっても構いません。

同じ y に複数の x が対応してもよい

関数 $y = x^2$ では、 $x = 2$ のときも $x = -2$ のときも $y = 4$ です。同じ $y = 4$ に2つの x が対応していますが、それぞれの x に対する y は1つだけです。したがって、 $y = x^2$ は関数です。

関数の条件は x から y を見る

「同じ y に複数の x があるから関数ではない」という判断は誤りです。関数かどうかは、1つの x から見たときに y が1つに決まるかで判断します。

例題

例題 1

関数 $y = 3x + 2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $x = 2$ のときの y の値を求めなさい。
- (2) $x = -1$ のときの y の値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

- (1) $x = 2$ を代入すると、 $y = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ です。
したがって、 $x = 2$ のとき $y = 8$ です。
- (2) $x = -1$ を代入すると、 $y = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$ です。
したがって、 $x = -1$ のとき $y = -1$ です。

例題 2

- $f(x) = x^2 - 2$ とする。
- (1) $f(3)$ を求めなさい。
 - (2) $f(-2)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

- (1) $x = 3$ を代入すると、 $f(3) = 3^2 - 2 = 7$ です。
- (2) $x = -2$ を代入すると、 $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$ です。
 $f(a)$ は、式の x を a に置き換えて計算します。

例題 3

関数 $y = 2x - 1$ のグラフ上に、点 $P(3, a)$ がある。
 a の値を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

点 $P(3, a)$ がグラフ上にあるので、 $x = 3$ のとき $y = a$ です。
関数の式に $x = 3$ を代入すると、 $a = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ です。
したがって、 $a = 5$ です。

演習問題**練習問題 1**

次の関係で、 y が x の関数であるものをすべて選びなさい。

- ・ (ア) $y = 2x + 3$
- ・ (イ) 1つの x に対して、 $y = 2$ と $y = -2$ の 2 つが対応する。
- ・ (ウ) $y = x^2$
- ・ (エ) y は x を 3 倍した数である。

練習問題 2

関数 $y = -2x + 5$ について、次の値を求めなさい。

- (1) $x = 0$ のときの y
- (2) $x = 3$ のときの y
- (3) $x = -2$ のときの y

練習問題 3

$f(x) = x^2 + 2x$ とする。

- (1) $f(0)$ を求めなさい。
- (2) $f(2)$ を求めなさい。
- (3) $f(-3)$ を求めなさい。

練習問題 4

関数 $y = x + 4$ について、次の対応を座標 (x, y) で表しなさい。

- (1) $x = -2$
- (2) $x = 0$
- (3) $x = 3$

練習問題 5

点 $A(2, 5)$ 、 $B(-1, -1)$ 、 $C(3, 8)$ のうち、関数 $y = 2x + 1$ のグラフ上にある点をすべて選びなさい。

練習問題 6

関数 $y = 3x - 4$ のグラフ上に点 $P(a, 8)$ がある。
 a の値を求めなさい。

練習問題 7

次の表は、ある関数 $y = f(x)$ の対応の一部を表している。

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

次の問いに答えなさい。

- (1) $f(2)$ を求めなさい。
- (2) $f(-1)$ を求めなさい。
- (3) $y = 4$ となる x をすべて答えなさい。

練習問題 8

ある生徒は、「 $y = x^2$ では $x = 2$ と $x = -2$ のどちらでも $y = 4$ になるので、 y は x の関数ではない」と考えました。
 この考えが誤っている理由を、関数の定義に触れながら説明しなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

- (ア) は関数です。どの x に対しても、 $y = 2x + 3$ によって y が 1 つに決まります。
 (イ) は関数ではありません。1 つの x に対して 2 つの y が対応しています。
 (ウ) は関数です。どの x に対しても x^2 は 1 つに決まります。
 (エ) は $y = 3x$ と表せるので関数です。
 したがって、関数であるものは (ア)、(ウ)、(エ) です。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $x = 0$ を代入すると、 $y = 5$ です。
 - (2) $x = 3$ を代入すると、 $y = -6 + 5 = -1$ です。
 - (3) $x = -2$ を代入すると、 $y = 4 + 5 = 9$ です。
- したがって、答えは順に $5, -1, 9$ です。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ です。
 - (2) $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$ です。
 - (3) $f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) = 3$ です。
- したがって、答えは順に $0, 8, 3$ です。

練習問題 4 の解答・解説

関数は $y = x + 4$ です。

- (1) $x = -2$ のとき $y = 2$ なので、 $(-2, 2)$ です。
- (2) $x = 0$ のとき $y = 4$ なので、 $(0, 4)$ です。
- (3) $x = 3$ のとき $y = 7$ なので、 $(3, 7)$ です。

練習問題 5 の解答・解説

点がグラフ上にあるかは、座標を $y = 2x + 1$ に代入して確かめます。

$A(2, 5)$ は $2 \cdot 2 + 1 = 5$ なのでグラフ上にあります。

$B(-1, -1)$ は $2 \cdot (-1) + 1 = -1$ なのでグラフ上にあります。

$C(3, 8)$ では $2 \cdot 3 + 1 = 7$ となり、 y 座標の 8 と一致しません。

したがって、グラフ上にある点は A, B です。

練習問題 6 の解答・解説

点 $P(a, 8)$ がグラフ上にあるので、 $x = a$ 、 $y = 8$ を式へ代入します。

$8 = 3a - 4$ なので、 $3a = 12$ です。

したがって、 $a = 4$ です。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 表より、 $x = 2$ のとき $y = 4$ なので、 $f(2) = 4$ です。

(2) $x = -1$ のとき $y = 1$ なので、 $f(-1) = 1$ です。

(3) $y = 4$ となるのは $x = -2$ と $x = 2$ です。

同じ y に複数の x が対応していても、1つの x に対する y が 1つに決まっていれば関数です。

練習問題 8 の解答・解説

関数であるための条件は、「1つの x に対して、 y がただ 1つに決まること」です。

$y = x^2$ では、 $x = 2$ に対して $y = 4$ の 1つだけに対応し、 $x = -2$ に対しても $y = 4$ の 1つだけに対応します。

異なる 2つの x が同じ y に対応することは、関数の定義に反しません。

したがって、 $y = x^2$ は x の関数です。