

第 24 講 三角比による三角形の面積

学習目標

- 三角形の面積を「底辺×高さ÷2」から求められる。
- 2 辺とその間の角から高さを三角比で表せる。
- 三角形の面積公式 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ を使える。
- どの 2 辺と角を使えば面積公式を適用できるか判断できる。

面積を求めるには高さが必要

出発点は底辺と高さ

三角形の面積は、

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times \text{底辺} \times \text{高さ}$$

で求められます。

ところが、一般の三角形では高さが直接与えられていないことがあります。

たとえば、2 辺の長さとその間の角だけが分かっている場合です。

このとき、三角比を使えば高さを表すことができます。

つまり、三角比による面積公式は新しい考え方ではなく、高さを三角比で表して、いつもの面積公式へ代入したものです。

2 辺とその間の角から高さをつくる

1 本の垂線で直角三角形をつくる

三角形 ABC で、 $AB = c$ 、 $AC = b$ 、角 A を 2 辺 AB と AC の間の角とします。

頂点 C から辺 AB へ垂線を下ろし、その長さを h とします。

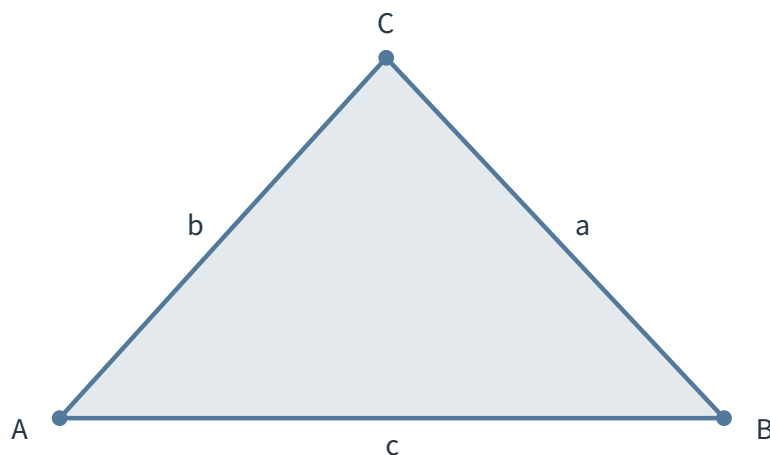


図1 辺 b と辺 c 、その間の角 A をもつ三角形

できた直角三角形を見ると、角 A に対して、斜辺は b 、向かい側の辺は高さ h です。したがって、

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

です。

よって、高さは $h = b \sin A$ と表せます。

高さを三角比で表す

辺 b と角 A が分かっているとき、辺 c を底辺とした高さは、

$$h = b \sin A$$

と表せます。

三角比は、斜めの辺から高さの成分を取り出すために使われています。

三角形の面積公式をつくる

高さをいつもの面積公式へ代入する

底辺を c 、高さを h とすると、三角形の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2}ch$$

です。

ここで $h = b \sin A$ なので、

$$S = \frac{1}{2}c \cdot b \sin A$$

となります。

したがって、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

です。

この公式では、2 辺 b, c と、その 2 辺の間の角 A を使っています。

三角比による三角形の面積

三角形 ABC で、辺 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とすると、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

が成り立ちます。

同様に、

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

と表すこともできます。

面積公式で使う角

面積公式では、選んだ 2 辺の間にある角を使います。

- ・ 辺 b, c を使うなら角 A
- ・ 辺 c, a を使うなら角 B
- ・ 辺 a, b を使うなら角 C

です。

辺と角の組合せを取り違えない

たとえば、

$$\frac{1}{2}bc \sin B$$

は一般には三角形の面積を表しません。

辺 b と c の間にある角は A だからです。

計算する前に、「選んだ 2 辺の間の角はどれか」を図で確認します。

直角三角形の面積とも一致する

角が 90° ならいつもの公式になる

$A = 90^\circ$ の場合を考えます。

$\sin 90^\circ = 1$ なので、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin 90^\circ$$

は、

$$S = \frac{1}{2}bc$$

となります。

このとき辺 b と c は直角に交わっているため、一方を底辺、もう一方を高さとして使えます。
したがって、三角比による面積公式は、直角三角形で学んだ面積公式とも一致します。

鈍角を含む三角形でも使える

鈍角でも正弦は正

三角形の内角は 0° より大きく 180° より小さいので、角 A が鈍角になることもあります。

たとえば $A = 120^\circ$ なら、

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

です。

したがって、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ$$

として、そのまま面積を求められます。

$0^\circ < A < 180^\circ$ では $\sin A > 0$ なので、面積も正の値になります。

どの公式を選ぶか

面積を求める手順

三角形の面積を三角比で求めるときは、次の順に考えます。

1. 長さが分かっている 2 辺を探す。
2. その 2 辺の間の角を確認する。
3. $S = \frac{1}{2} \times 2\text{辺} \times \sin(\text{間の角})$ の形へ代入する。
4. 特別な角の三角比を使って計算する。

2 辺と 60° から面積を求める

2 辺の長さが 4 と 6、その間の角が 60° だとします。

面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 60^\circ$$

です。

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、 $S = 6\sqrt{3}$ となります。

例題

例題 1

三角形 ABC で、 $b = 6$ 、 $c = 8$ 、 $A = 30^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

辺 b, c の間の角が A なので、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

を使います。

値を代入すると、 $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$ です。

したがって、 $S = 12$ です。

例題 2

三角形 ABC で、 $a = 5$ 、 $c = 8$ 、 $B = 60^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

辺 a, c の間の角は B です。

したがって、

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B$$

を使います。

$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、 $S = 10\sqrt{3}$ です。

例題 3

三角形 ABC で、 $a = 4$ 、 $b = 7$ 、 $C = 120^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

辺 a, b の間の角は C なので、

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

です。

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を使うと、 $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

したがって、 $S = 7\sqrt{3}$ です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 $b = 5$ 、 $c = 10$ 、 $A = 30^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 $b = 6$ 、 $c = 8$ 、 $A = 90^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 $a = 6$ 、 $c = 4$ 、 $B = 45^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 $a = 8$ 、 $b = 5$ 、 $C = 60^\circ$ とする。

三角形 ABC の面積を求めなさい。

練習問題 5

三角形 ABC で、 $b = 4$ 、 $c = 9$ 、 $A = 120^\circ$ とする。
三角形 ABC の面積を求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC の面積が 12、 $b = 6$ 、 $c = 8$ である。
 $\sin A$ を求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC の面積が $9\sqrt{3}$ 、 $a = 6$ 、 $b = 6$ である。
 $\sin C$ を求め、 C が 60° または 120° のどちらかであることを答えなさい。

練習問題 8

ある生徒は、三角形 ABC で $b = 6$ 、 $c = 10$ 、 $B = 30^\circ$ のとき、

$$S = \frac{1}{2}bc \sin B$$

として面積を求めようとした。
この式をそのまま使えない理由を説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

辺 b, c の間の角は A です。
したがって、 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ を使います。
 $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$ なので、 $S = \frac{25}{2}$ です。

練習問題 2 の解答・解説

$\sin 90^\circ = 1$ なので、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1$$

です。
したがって、 $S = 24$ です。
これは底辺 8、高さ 6 として求めた面積とも一致します。

練習問題 3 の解答・解説

辺 a, c の間の角は B です。

したがって、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin 45^\circ$$

です。

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので、 $S = 6\sqrt{2}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

辺 a, b の間の角は C です。

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \sin 60^\circ$$

より、 $S = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

したがって、 $S = 10\sqrt{3}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

辺 b, c の間の角は A です。

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

です。

したがって、 $S = 9\sqrt{3}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

面積公式から、

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin A$$

です。

右辺の数の部分は 24 なので、 $12 = 24 \sin A$ です。

したがって、 $\sin A = \frac{1}{2}$ です。

練習問題 7 の解答・解説

面積公式より、

$$9\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin C$$

です。

したがって、 $9\sqrt{3} = 18 \sin C$ なので、 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

$0^\circ < C < 180^\circ$ で $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる特別な角は 60° と 120° です。

よって、 C は 60° または 120° です。

練習問題 8 の解答・解説

面積公式 $\frac{1}{2}bc \sin A$ では、辺 b と辺 c の間の角である A を使います。

与えられた $B = 30^\circ$ は、辺 b と辺 c の間の角ではありません。

したがって、 $b = 6$ 、 $c = 10$ 、 $B = 30^\circ$ だけを使って $\frac{1}{2}bc \sin B$ とすることはできません。

面積公式では、使う 2 辺とその間の角を必ず対応させます。